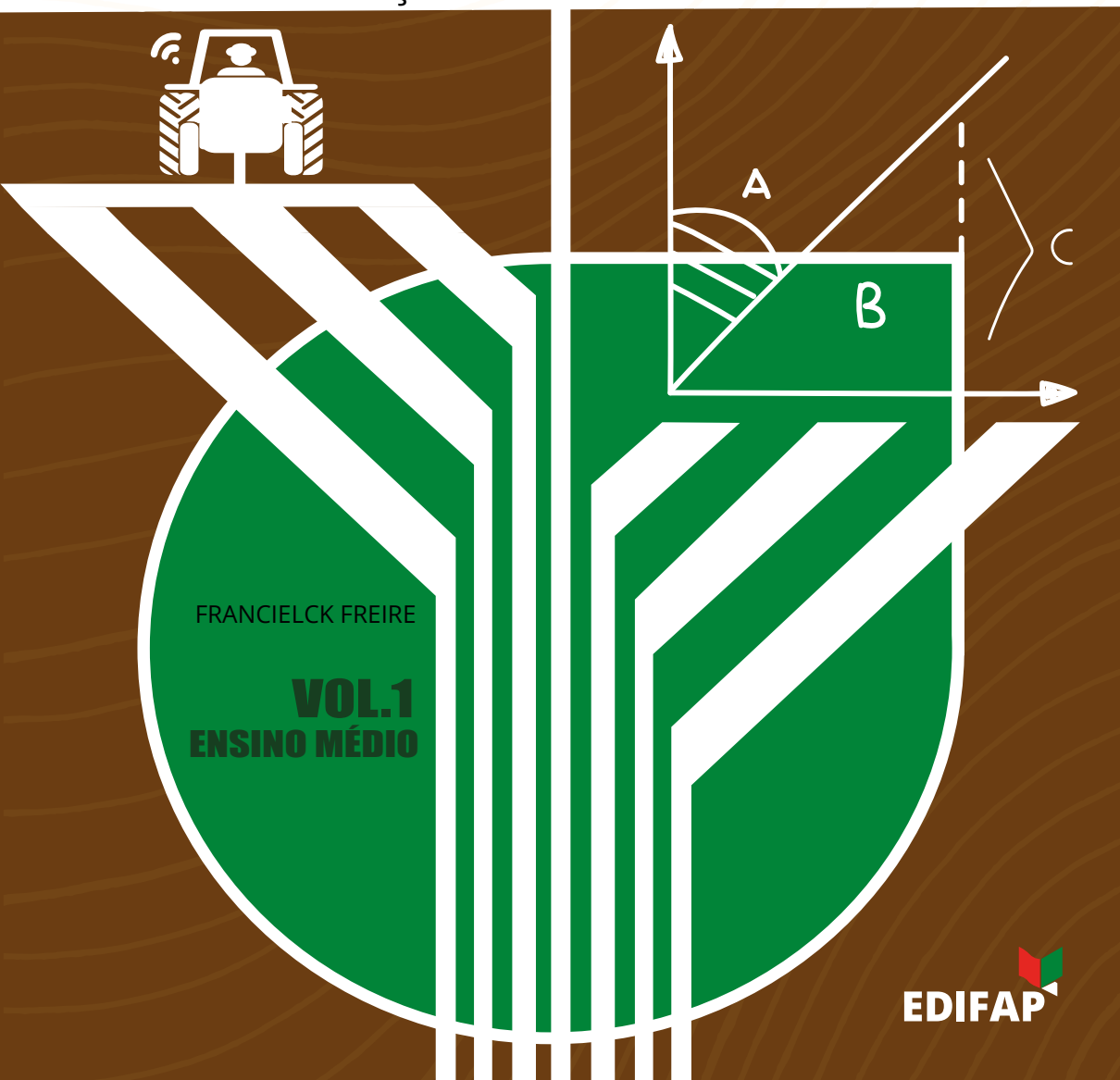
MATEMÁTICA APLICADA ÀS CIÊNCIAS AGRÁRIAS

CONTEXTUALIZAÇÃO - MODELAGEM - TECNOLOGIA



FRANCIELCK FREIRE

VOL.1
ENSINO MÉDIO

EDIFAP

MATEMÁTICA APLICADA ÀS CIÊNCIAS AGRÁRIAS

CONTEXTUALIZAÇÃO - MODELAGEM - TECNOLOGIA

INSTITUTO FEDERAL
Amapá

CONSELHO EDITORIAL CIENTÍFICO

Abílio Eduardo
(Universidade Katyavala Bwila – AO)
Adriano Fonseca
(Universidade Federal do Tocantins - BR)
Aldo Parra
(Universidad Del Cauca - CO)
Alexandre Pais
(Manchester University - UK)
Armando Aroca
(Universidad del Atlántico - CO)
Eliane Vasquez
(Universidade Federal do Amapá - BR)
Elisângela Melo
(Universidade Federal do Tocantins - BR)
Hilbert Blanco
(Universidad de Nariño - CO)
Ieda Giongo
(Universidade do Vale do Taquari - BR)
Natividad Adamuz
(Universidad de Córdoba - ES)
Nuno Vieira
(Universidade Lusófona - PT)
Sávio Bicho
(Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará - BR)

INSTITUTO FEDERAL
Amapá

CONSELHO EDITORIAL DO IFAP

Titulares

Flávia Karolina Lima Duarte Barbosa
Luiz Ricardo Fernandes de Farias Aires
José Rodrigo Sousa de Lima Deniur
Nilvan Carvalho Melo
Darley Calderaro Leal Matos
Welber Carlos Andrade da Silva
Diego Armando Silva da Silva
Marialva do Socorro Ramalho de Oliveira de Almeida
Larissa Pinheiro de Melo
Suany Rodrigues da Cunha
Carlos Alexandre Santana Oliveira

Suplentes

Ivan Gomes Pereira
Jéssica de Oliveira Pontes Nóbrega
Cleber Macedo de Oliveira
Joadson Rodrigues da Silva Freitas
Adrielma Nunes Ferreira Bronze
Johnny Gilberto Moraes Coelho
Mábia Nunes Toscano
Victor Hugo Gomes Sales
Themístocles Raphael Gomes Sobrinho
Romaro Antonio Silva

FRANCIELCK DOMINGOS FREIRE
Autor

MATEMÁTICA APLICADA ÀS CIÊNCIAS AGRÁRIAS

CONTEXTUALIZAÇÃO - MODELAGEM - TECNOLOGIA

EDIFAP

Macapá
2024

MATEMÁTICA APLICADA ÀS CIÊNCIAS AGRÁRIAS
CONTEXTUALIZAÇÃO - MODELAGEM - TECNOLOGIA

Todos os direitos reservados. É permitida a reprodução parcial ou total desta obra, desde que citada a fonte e que não seja para venda ou qualquer fim comercial.Os artigos assinados, no que diz respeito tanto à linguagem quanto ao conteúdo, não refletem necessariamente a opinião da Editora do Instituto Federal do Amapá. As opiniões são de responsabilidade exclusiva dos respectivos autores. A revisão textual, formatação e adequação às normas ABNT são de responsabilidade dos autores

EQUIPE TÉCNICA EDITORIAL

Flávia Karolina Lima Duarte Barbosa
Editora Chefa

Romaro Antonio Silva
Editor adjunto

Luiz Ricardo Fernandes Farias Aires
Editor adjunto

Ivan Gomes Pereira
Diagramador

Suzana Cardoso
Bibliotecária

DIAGRAMAÇÃO, PROJETO GRÁFICO E CAPA
Ivan Gomes Pereira

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

F866m Freire, Francielck Domingos.
Matemática aplicada às Ciências Agrárias : contextualização, modelagem, tecnologia / Francielck Domingos Freire. – Macapá : Edifap, 2024.
374f. : il. ; v.1.

ISBN 978-65-89513-28-5 (digital)
978-65-89513-27-8 (impresso)
Volume 1: Ensino médio

1. Matemática – ciências agrárias. 2. Modelagem – matemática. 3. Ciências Agrárias - matemática. II. Título.

CDD 510

Ficha Catalográfica elaborada pela Bibliotecária Suzana Cardoso, CRB 1.142, com dados fornecidos pela Editora do IFAP

A meus filhos, Vinícius e Kauã,
e a minha esposa, Ligele Cristine.

AGRADECIMENTOS

Por esse trabalho, gostaria de agradecer imensamente à equipe técnica do Instituto Federal do Amapá - Campus Porto Grande, em particular, aos amigos e colaboradores: Alyne Cristina Sodré Lima, Antônio Francelino de Oliveira Filho, Breno Henrique Pedroso, João Maria do Amaral Junior, Marcelo Batista Teixeira, Osvaldo de Mello Campelo Vasconcelos e, em especial, ao excelente profissional, Cleber Machado de Oliveira, por algumas revisões técnicas e valiosas contribuições.

Agradecimento aos pares, amigos e excelentes professores de matemática que contribuírem com críticas, sugestões e revisões: Carlos Santana, Dejildo Roque, Eduardo Rosário, Helington Franzotti, Hilton Bruno, Paulo Robson e Rudá Magalhães.

Aos colegas da Biblioteca do instituto federal do Amapá do Campus Porto Grande: Ronny Nunes e Tábata Brito, pela paciência durante minhas consultas exaustivas e empréstimos exagerados.

Aos acadêmicos das turmas 2019.1 e 2018.2 de Engenharia agronômica do IFAP- Campus Porto Grande, 2022.1 de Engenharia civil do IFAP - Campus Macapá e aos acadêmicos de licenciatura em Matemática IFAP - Campus Macapá, que trabalharam os textos e contribuíram para sua construção. Singular gratidão aos alunos mais dedicados dessas turmas: João Vitor de Andrade Soares, Lucival Jessé Morais da Silva, Ledegelson Moura de Souza e Josué Silva Galvão.

Por fim, um agradecimento mais que especial ao meu pai (in memoriam), à minha mãe e à minha família: Ligele Cristine (esposa), Vinícius Freire e Kauã Freire (filhos), pela paciência e compreensão pelas minhas ausências enquanto estudava, pesquisava e escrevia.

PREFÁCIO

Esse livro-texto é uma coletânea de partes dos textos de um livro-caderno, objeto de minha dissertação de mestrado (FREIRE, 2014) publicada em 2014 e de pesquisas de aplicação da Matemática às ciências agrárias.

O livro-caderno (FREIRE, 2013) objeto dessa dissertação, foi um dos projetos desenvolvidos na escola estadual Esther da Silva Virgolino no estado do Amapá e é um dos trabalhos pelo qual tenho muito orgulho em ter escrito. Além de ser um material didático gratuito (por isso não foi publicado) em que o aluno não copiava conteúdos em seu caderno, oportunizava também a contextualização de conteúdos matemáticos e o uso de tecnologias em sala de aula.

É nesse sentido de contextualização e do uso de tecnologias, pensando em um livro com viés didático concomitante à modelagem matemática, que escrevi essa coletânea.

Quando comecei a lecionar no Instituto Federal do Amapá - Campus Agrícola Porto Grande, os problemas didáticos encontrados no instituto eram similares aos das escolas estaduais onde lecionava anteriormente: os livros didáticos disponibilizados pelo MEC não eram aplicáveis à realidade profissional de cada curso, seja técnico ou superior.

E além disso, o único livro de Matemática (FERREIRA, 1999) com aplicação às ciências agrárias (inclusive, um excelente livro de bibliografia complementar), não possuía todos os conteúdos exigidos nos componentes dos cursos. Lembro, por exemplo, que muitos professores que ministravam componentes técnicos nos cursos de

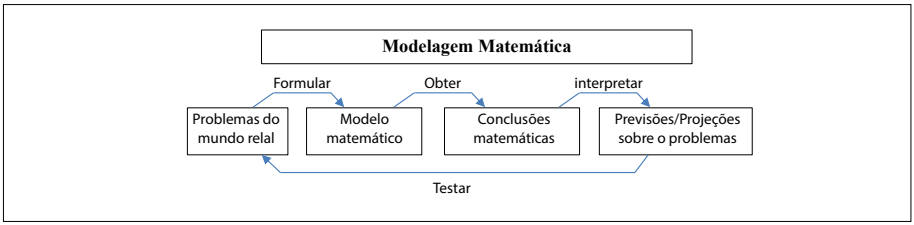
agronegócio, agropecuária ou agroecologia do campus, reclamavam que os alunos, entre outras coisas, não sabiam resolver e nem aplicar regra de três, conteúdo indispensável para o desenvolvimento do componente. Isso me incomodava!

E os alunos em contrapartida, questionavam-me: "Professor! em que situações de minha vida profissional irei aplicar tal conteúdo matemático?". Respostas improvisadas eram dadas e embora razoáveis, não satisfaziam a mim, e talvez, nem à eles. Algo faltava!

Resolvi, então, pesquisar sobre abordagens e aplicações matemáticas na área. A contextualização passou a ser, diante desse cenário, um dos pilares fundamentais da pesquisa. Mas, não queria fazê-la de qualquer forma. Não poderia ser ingênua ou sem sentido, precisava ser técnica, adequada e prática ao curso. Foi aí que surgiu uma parceria com os colegas professores da área técnica do Campus (cujos nomes estão nos agradecimentos), que não só incentivaram a produção desse material, como também sugeriram várias bibliografias, modelos de aplicação, dicas e participação na elaboração de conteúdos e exercícios. A contextualização presumidamente alcançada com essas características, pode ser apreciada em demasia nessa coleção e segue o organograma a seguir.

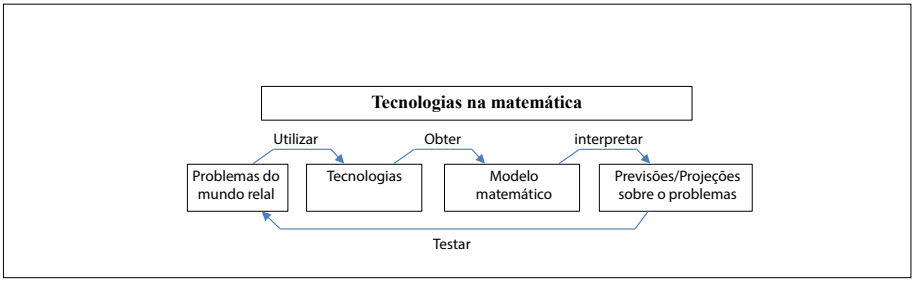
Uma vez contextualizado os conteúdos, era necessário colocar em prática o que havia sido ensinado. Foi então que elaborei um projeto de pesquisa: "uso de modelagem matemática no cultivo de alface", que foi realizado no mesmo instituto e campus, sob minha orientação, com contribuição inestimável do agrônomo Cleber Machado de Oliveira, e desenvolvido pelos alunos: Cleverton França Vaz, João Vitor de Andrade Soares (acadêmicos de engenharia agronômica) e Antônio Sales Maciel (aluno do curso técnico em agronegócio).

Nesse projeto, foi possível acompanhar o desenvolvimento da alface em doses diferentes de nitrogênio, descobrir qual o modelo matemático que se ajusta aos parâmetros de crescimento dessa hortaliça e, a partir desse modelo, resultado da regressão (presente nesse livro), identificar qual dose de nitrogênio seria ideal para a otimização da produção do cultivo (em termos matemáticos: o máximo ou mínimo da função). Ficou evidente, com esse projeto e a partir de diversas pesquisas sobre experimentos agrários (livros, revistas científicas, artigos, trabalhos de conclusão de curso, dissertações, etc.), a importância da modelagem matemática para às ciências agrárias. É o que o leitor também irá encontrar nessa coleção segundo o organograma a seguir.



Contudo, embora os alunos desse projeto tenham posto em prática o que aprenderam em sala de aula, como teorias e cálculos (à mão), a tecnologia se fez necessária como ferramenta auxiliar de confirmação de dados e interpretação de resultados. Na verdade, é difícil imaginar algum técnico ou engenheiro da área não utilizando tais ferramentas no exercício de sua profissão. É o que também propõe essa coleção.

Em todos os volumes da coleção, convenientemente, é ensinada, com imagens ilustrativas e passo a passo, a utilização de recursos tecnológicos, como calculadoras científicas, planilhas eletrônicas e softwares gráficos, para que o leitor tenha à sua disposição outras ferramentas auxiliares de conhecimento.

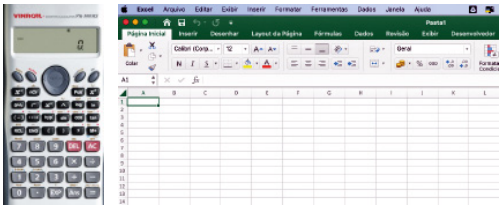


A calculadora científica sugerida na coleção para uso é a Vinacal VN-500MS. No entanto, os comandos utilizados nessa calculadora são praticamente os mesmos utilizados em muitas outras calculadoras, como a Casio FX-82MS, por exemplo.

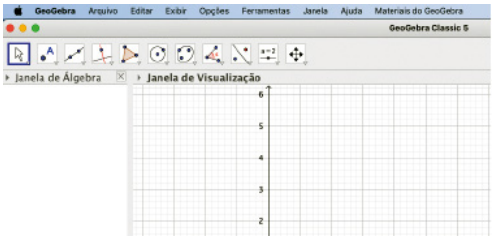
Já a planilha eletrônica utilizada no material é da Microsoft excel para Mac, versão 16.67. Não obstante, os comandos utilizados nesse software são os mesmos para qualquer versão e para qualquer sistema operacional, seja o Windows, MacOs ou Linux.

Quanto ao software gráfico foi utilizado o software geogebra classic versão 5.0. O geogebra é um software gratuito e de código aberto que permite de forma intuitiva a iteração entre diversas frentes matemáticas como geometria, álgebra, além de construção e análise de gráficos, entre outros. O download do software, seja para

computador ou smartphone pode ser feito gratuitamente pelo site geogebra.org. Há opção também de utilizar o software on-line (sem precisa instalar) no mesmo endereço eletrônico.



Calculadora vinacal VN-500MS (à esquerda) e Planilha Excel (à direita)



Geogebraclassic–versão5.0

Em termos de estrutura, a coleção matemática aplicada às ciências agrárias é dividida em quatro volumes. Os volumes 1, 2 e 3 são voltados para o ensino médio técnico em agroecologia, agronegócio, agropecuária ou qualquer nível médio técnico em ciências agrárias. Já o volume 4 é destinado ao nível superior em engenharia agronômica, engenharia agrícola ou qualquer outro nível superior, porém as aplicações são destinadas às ciências agrárias.

Cada volume é dividido em unidades, cada unidade em seções e cada seção em subseções, de forma sequencial. Por exemplo: Unidade 12, seção 12.1 e subseção 12.1.1. Os exercícios são numerados de acordo com a unidade e a ordem do exercício dentro dessa unidade. Por exemplo: exercícios 12.1, exercícios 12.2, etc. Nos volumes 1, 2 e 3 os exercícios de aplicação estão intercalados com os exercícios comuns (de nível médio), enquanto no volume 4, os exercícios de aplicação ficam sempre no final da unidade e são separados dos demais.

Além dos exercícios elaborados pelo autor com base na contextualização, modelagem e tecnologia, há também exercícios selecionados criteriosamente do ENEM, ENADE, outras instituições e vestibulares. Todos são selecionados com base no conteúdo das unidades afins e ordenados em ordem de dificuldade.

Na coleção, também é possível encontrar a matemática pura, com teoremas (inéditos, inclusive) e demonstrações (algumas inéditas, também), sempre discorridas com cuidados técnicos e formalidades que um bom livro de matemática exige.

Por fim, é uma coleção de livros didáticos elaborados com o objetivo de assessorar professores e profissionais da área, e de dar um embasamento teórico mais contundente aos alunos e acadêmicos da área. Modestamente, é o que espero!

Francielck Domingos Freire

SUMÁRIO

CAP 1
1. NOÇÕES ELEMENTARES 23
1.1. Conjuntos 23
1.1.1. Simbologia 23
1.1.2. Representação de um conjunto 24
1.1.3. Conjunto vazio, unitário, finito, infinito e universo 25
1.1.4. Conjuntos iguais e subconjunto 27
EXERCÍCIOS 1.1 30
1.1.5. União, interseção e diferença de conjuntos 31
EXERCÍCIOS 1.2 36
1.1.6. Resolução de problemas envolvendo conjuntos 38
EXERCÍCIOS 1.3 42
1.2. Conjuntos numéricos 45
1.2.1. Conjunto dos números naturais (N) 45
1.2.2. Conjunto dos números inteiros (Z) 46
1.2.3. Conjunto dos números racionais (Q) 46
1.2.4. Conjunto dos números irracionais (I) 47
1.2.5. Conjunto dos números reais (R): 49
1.2.6. Conjunto dos números complexos (C) 49
1.2.7. Intervalos numéricos 49
EXERCÍCIOS 1.4 52
1.3. Razão 54
EXERCÍCIOS 1.5 56
1.4. Proporção 60
EXERCÍCIOS 1.6 62
CAP 2
2. REGRA DE TRÊS E PORCENTAGEM 69
2.1. Grandezas diretamente e inversamente proporcionais 69
2.2. Regra de Três 71
2.2.1. Regra de três simples 71
EXERCÍCIOS 2.1 73
2.2.2. Regra de três composta 75
EXERCÍCIOS 2.2 79
2.3. Porcentagem 81
EXERCÍCIOS 2.3 86
CAP 3
3. PROGRESSÕES E JUROS 97
3.1. Progressão aritmética (P.A) 97
3.1.1. Classificação das progressões aritméticas 98
3.1.2. Construção de progressões aritméticas 99
EXERCÍCIOS 3.1 100

3.1.3. Fórmula do termo geral de uma P.A 100
EXERCÍCIOS 3.2 104
3.1.4. Soma dos termos de uma P.A 107
EXERCÍCIOS 3.3 109
3.2. Progressão geométrica (P.G) 112
3.2.1. Classificação das progressões geométricas 112
EXERCÍCIOS 3.4 114
3.2.1. Fórmula do termo geral de uma P.G 115
EXERCÍCIOS 3.5 117
3.2.2. Fórmula da soma dos termos de uma P.G 119
EXERCÍCIOS 3.6 120
3.2.3. Limite da soma dos termos de uma P.G infinita 122
EXERCÍCIOS 3.7 123
3.3. Juros 124
3.3.1. Juros simples 124
EXERCÍCIOS 3.8 127
3.3.2. Juros compostos 128
EXERCÍCIOS 3.9 131
CAP 4
4. ESTATÍSTICA BÁSICA 137
4.1. Conceitos iniciais 137
4.2. Medida de tendência central 138
4.2.1. Média Aritmética (M) 138
4.2.2. Média Aritmética Ponderada (MP) 138
4.2.3. Moda (Mo) 139
4.2.4. Mediana (Md) 139
4.3. Medida de dispersão 140
4.3.1. Desvio Médio (Dm) 140
4.3.2. Variância (V) 141
4.3.3. Desvio Padrão (Dp) 141
4.4. Cálculo de medidas de tendência central e dispersão usando planilha eletrônica 143
4.5. Cálculo de média aritmética, desvio padrão e variância usando calculadora científica .. 145
EXERCÍCIOS 4.1 146
4.6. Análise de gráficos 149
EXERCÍCIOS 4.2 153
CAP 5
5. NOÇÕES DE FUNÇÃO 161
5.1. Definição de função 161
EXERCÍCIOS 5.1 164
5.2. Plano cartesiano 166
5.2.1. Função no plano cartesiano 167
5.3. Cálculo da imagem de uma função 169
5.4. Crescimento, decrescimento e continuidade de uma função 170

5.5. Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas 171
5.6. Funções inversas 173
5.7. Função par e função ímpar 175
EXERCÍCIOS 5.2 176
CAP 6
6. FUNÇÃO AFIM 185
6.1. Definição 185
6.2. Gráfico 185
EXERCÍCIOS 6.1 190
6.3. Zero da função afim 192
6.4. O gráfico da função afim no geogebra 193
EXERCÍCIOS 6.2 194
6.5. Taxa de Variação e cálculo de uma Função afim 195
EXERCÍCIOS 6.3 201
6.6. Regressão linear 206
6.6.1. Coeficiente de determinação (R^2) 208
6.6.2. Regressão linear usando planilha eletrônica 210
6.6.3. Regressão linear usando calculadora científica 213
EXERCÍCIOS 6.4 215
CAP 7
7. FUNÇÃO QUADRÁTICA 223
7.1. Definição 223
7.2. Gráfico 223
EXERCÍCIOS 7.1 226
7.3. Zero da função quadrática 227
EXERCÍCIOS 7.2 230
7.4. Forma canônica e vértices 232
7.5. Teoremas e informações complementares 238
EXERCÍCIOS 7.3 239
7.6. Taxas de variação e a função quadrática 242
7.7. O gráfico da função quadrática no geogebra 251
EXERCÍCIOS 7.4 252
7.8. Regressão quadrática 255
7.8.1. Regressão quadrática usando planilha eletrônica 258
7.8.2. Regressão quadrática usando calculadora científica 260
EXERCÍCIOS 7.5 262
CAP 8
8. FUNÇÃO EXPONENCIAL 269
8.1. Revisão sobre potências 269
8.1.1. Resolvendo potências com expoente natural 270
8.1.2. Resolvendo potências com expoente inteiro 270
8.1.3. Propriedades de potência 271
8.1.4. Resolvendo potências com expoente racional 273

8.1.5. Resolvendo potências com expoente irracional 274
EXERCÍCIOS 8.1 274
8.2. Definição de função exponencial 275
8.3. Gráfico da função exponencial 276
EXERCÍCIOS 8.2 278
8.4. Equação exponencial 279
EXERCÍCIOS 8.3 282
8.5. Caracterização da função exponencial 285
EXERCÍCIOS 8.4 290
8.6. Gráfico da função exponencial no geogebra 291
CAP 9
9. FUNÇÃO LOGARÍTMICA 295
9.1. Logaritmo 295
EXERCÍCIOS 9.1 297
9.1.1. Consequências da Definição de Logaritmo 297
9.1.2. Propriedades dos Logaritmos 298
EXERCÍCIOS 9.2 301
9.1.3. Mudança de Base 302
EXERCÍCIOS 9.3 303
9.1.4. Cálculo de logaritmo utilizando calculadora científica 304
9.2. Equação Logarítmica 305
EXERCÍCIOS 9.4 306
9.3. Função Logarítmica 308
9.3.1. Gráfico da função logarítmica 308
9.3.2. Gráfico da função Logarítmica X função Exponencial 309
9.4. Gráfico da função logarítmica no geogebra 309
EXERCÍCIOS 9.5 310
9.5. Logaritmos naturais 314
9.6. Linearização de funções exponenciais e logarítmicas 317
EXERCÍCIOS 9.6 320
9.7. Regressão exponencial e logarítmica 324
9.7.1. Regressão exponencial 324
9.7.2. Regressão logarítmica 326
9.7.3. Regressão exponencial e logarítmica utilizando planilha eletrônica 327
9.7.4. Regressão exponencial e logarítmica usando calculadora científica 329
EXERCÍCIOS 9.7 332
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 335
TABELAS 341
GABARITOS E SOLUÇÕES 345
SOBRE O AUTOR 371
SOBRE A OBRA 372

CAPÍTULO

1

NOÇÕES ELEMENTARES

NOÇÕES ELEMENTARES

1. NOÇÕES ELEMENTARES

Iniciaremos nossos estudos com as noções elementares sobre conjuntos, conjuntos numéricos, unidades de medidas, razão e proporção. Essas noções elementares servirão como base para o desenvolvimento de todos os conteúdos presentes nessa coleção.

1.1. Conjuntos

A noção matemática de conjunto é praticamente a mesma que se usa na linguagem comum: é o mesmo que agrupamento, classe, coleção, etc. Veja alguns exemplos:

1) Conjunto das vogais;
2) Conjunto dos algarismos romanos;
3) Conjunto dos números ímpares positivos;
4) Conjunto dos números ímpares positivos menores que 10;
5) Conjunto dos naipes das cartas de um baralho.

Cada membro ou objeto que entra na formação do conjunto é chamado de elemento. Assim, nos exemplos anteriores os elementos de cada conjunto são, respectivamente:

1) {a, e, i, o, u};
2) {I, V, X, L, C, D, M};
3) {1, 3, 5, 7, 9,11,13...};
4) {1,3,5,7,9};
5) {Paus, ouros, copas, espadas}.

No exemplo 3, podemos afirmar que cada número ímpar é elemento do conjunto dos números ímpares, isto é, pertence ao conjunto. Em particular, 5 pertence ao conjunto dos números ímpares e 2 não pertence a esse conjunto. Para representar essa relação de pertinência, usamos a simbologia a seguir.

1.1.1. Simbologia

Usando simbologia, comumente representamos um conjunto com uma letra maiúscula do nosso alfabeto: A, B, C, ..., e um elemento com uma letra minúscula

também do nosso alfabeto: a, b, c, d, x, y, ...

Relação de pertinência: Seja A um conjunto e x um elemento. Se x pertence ao conjunto A, escrevemos: $x \in A$ (lê-se: x pertence a A). Para indicar que x não é elemento do conjunto A, escrevemos: $x \notin A$ (lê-se: x não pertence a A).

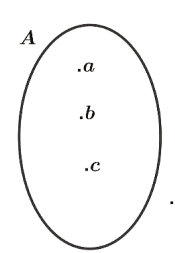
Além de relacionar elementos com conjuntos, podemos também relacionar conjuntos entre si estabelecendo conectivos (símbolos) entre eles. Esses conectivos podem ser utilizados para afirmar ou negar que um conjunto está contido ou não em outro, que contém ou não outro, ou que tais conjuntos são iguais ou diferentes, entre outros. O quadro abaixo mostra os símbolos que serão utilizados em nossos estudos.

SIMBOLOGIA	
$\in$: pertence	$\notin$: não pertence
$\subset$: está contido	$\not\subset$: não está contido
$\supset$: contém	$\not\supset$: não contém
$\cap$: intersecção	$\cup$: união
$=$: igual	$\neq$: diferente
$\exists$: existe	$\nexists$: não existe
$>$: maior e $\geq$: maior igual	$<$: menor e $\leq$: menor igual
$\mid$: tal que	$\forall$: para todo
$\Rightarrow$: implica que	$\Leftrightarrow$: se, e somente se
$\pm$: mais ou menos	$\therefore$ portanto
$\cong$: aproximadamente igual	$\emptyset$: conjunto vazio
$\mathbb{N}$: conjunto dos números naturais	$\mathbb{Z}$: conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Q}$: conjunto dos números racionais	$\mathbb{I}$: conjunto dos números irracionais
$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais	$\mathbb{C}$: conjunto dos números complexos

1.1.2. Representação de um conjunto

Por diagrama: A representação do conjunto é feita por pontos interiores a uma linha fechada e não entrelaçada (ou um círculo) denominado diagrama de Venn (em homenagem a John Venn 1834-1923). Conforme a seguir:

Essa representação nos indica que: $a \in A$, $b \in A$, $c \in A$ e $d \notin A$.



Por descrição dos elementos: Dispõem-se os elementos individualmente entre chaves e separados por vírgulas.

Exemplos:

- $A = \{a, e, i, o, u\}$.
- $B = \{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$.

Por meio de uma propriedade: Podemos representar também um conjunto por meio de uma propriedade P de seus elementos, da seguinte maneira

$$A = \{x \mid x\ tem\ a\ propriedade\ P\}.$$

Lê-se: "A é o conjunto dos elementos x tal que x tem a propriedade P".

Exemplos:

- $\{ x \mid x$ é $a\ capital\ do\ Brasil \}$ é uma maneira de indicar o conjunto: $\{Brasília\}$.
- $\{ x \mid x$ é $divisor\ inteiro\ de\ 3 \}$ é uma maneira de indicar o conjunto: $\{ 1, -1, 3, -3 \}$.

1.1.3. Conjunto vazio, unitário, finito, infinito e universo

Conjunto vazio: É um conjunto que não possui elemento algum. Os símbolos usuais para o conjunto vazio são $\emptyset$ ou $\{\}$.

Exemplo: $B = \{ x \mid x$ é $ímpar\ positivo\ e\ menor\ que\ 1 \}$.

Conjunto unitário: É um conjunto que possui um único elemento.

Exemplo: $C = \{1\}$ ou $C = \{ x \mid x$ é $divisor\ positivo\ de\ 1 \}$.

Conjunto finito: Intuitivamente, quando se tem um conjunto em que é possível contar (ou enumerar) os seus elementos, dizemos que ele é finito. Ao ser representado pela descrição dos seus elementos não apresenta reticências.

Exemplo: $\{2, 7, 15, 20\}$.

Conjunto infinito: Quando se tem um conjunto em que **não** é possível contar (ou enumerar) os seus elementos, dizemos que ele é infinito. Ao ser representado pela descrição dos seus elementos apresenta reticências.

Exemplo: $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

Conjunto universo: É o conceito atribuído a um conjunto maior que contenha os demais conjuntos, subconjuntos e elementos.

Para entender a ideia de conjunto universo, podemos considerar, por exemplo, uma escola como sendo o conjunto universo, onde contém outros conjuntos, que são as salas, e essas, por sua vez, contém os alunos, que são os elementos.

Exemplos resolvidos:

1º exemplo: Dê os elementos dos seguintes conjuntos.

$A = \{x \mid x \text{ é } letra\ da\ palavra\ sucesso\} \Rightarrow$ A = {s, u, c, e, o}.

$B = \{x \mid x \text{ é } o\ nome\ dos\ dedos\ da\ mão\} \Rightarrow$B = {mínimo, anelar, médio, indicador e polegar}.

2º exemplo: Descreva por meio de uma propriedade característica dos elementos cada um dos conjuntos seguintes.

$A = \{0,2,4,6,8,\ldots\} \Rightarrow$ A $= \{x \mid x \text{ é } par\ não\ negativo\}$.

$B = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \Rightarrow$ B $= \{x \mid x \text{ é } um\ algarismo\ hindu-arábico\}$.

$C = \{verde, amarelo,\ azul,\ branco\} \Rightarrow$ C $= \{x \mid x \text{ é } cor\ da\ bandeira\ do\ Brasil\}$.

3º exemplo: Descreva e represente usando o diagrama, os elementos dos seguintes conjuntos.

a)A é o conjunto dos múltiplos inteiros de 3, entre -4 e + 4;

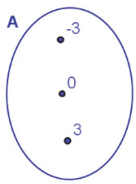
b)B é o conjunto dos divisores inteiros de 21;

c)C é o conjunto dos múltiplos inteiros de 0;

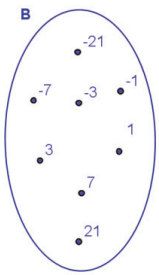
d)D é o conjunto dos números primos entre 12 e 34.

Solução:

a) $A = \{-3, 0, 3\} \Longrightarrow$



b) $B = \{-21, -7, -3, -1, 1, 3, 7, 21\}$



SAIBA MAIS!

Múltiplos de x: *São números inteiros (positivos e negativos, incluindo o zero) que são divisíveis por x.*

Divisores de x: *São números inteiros (positivos e negativos) que dividem x.*

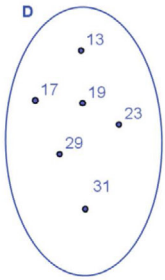
Divisibilidade: *Um número é divisível por outro, quando a divisão é exata (deixa resto zero). Exemplo: 49 é divisível por 7; 9 é divisível por 3; 5 não é divisível por 2, pois deixa resto 1.*

Número primo: *É um número natural (ou positivo) que não possui divisores além do 1 e ele mesmo. Os números primos são: 2,3,5,7,11,13,etc. Um número que não é primo é denominado de* ***composto*** *(exceto o número 1 que não é primo e nem composto).*

c) O zero só possui um múltiplo, o próprio zero. $C = \{0\}$:



d) $D = \{13, 17, 19, 23, 29, 31\}$



4º exemplo: Descreva por meio de uma propriedade dos elementos:

$A = \{+1, -1, +2, -2, +4, -4, +8, -8\} \Rightarrow A = \{x \mid x \text{ é } divisor\ de\ 8\}.$

$B = \{5, 7, 11, 13\} \Rightarrow B = \{x \mid x \text{ é } primo, maior\ que\ 4\ e\ menor\ que\ 14\}.$

$C = \{m, a, t, e, i, c\} \Rightarrow C = \{x \mid x \text{ é } letra\ da\ palavara\ matemática\}.$

$D = \{Macapá\} \Rightarrow B = \{x \mid x \text{ é } capital\ brasileira\ cortada\ pela\ linha\ do\ equador\}.$

1.1.4. Conjuntos iguais e subconjunto

Conjuntos iguais: Dois conjuntos A e B são iguais quando todo elemento de A pertence a B e, reciprocamente, todo elemento de B pertence a A.

$$A = B \Rightarrow (x \in A\ e\ x \in B)$$

Exemplos:

- $\{x, b, y, d\} = \{d, y, b, x\}$
- $\{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\} = \{x \mid x \text{ é } inteiro\ positivo\ e\ par\}$
- $\{x \mid x \text{ é } primo\ e\ par\} = \{2\}$

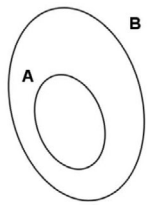
Subconjunto: É um conjunto que está contido em outro conjunto. Escrevemos: $A \subset B$ (lê-se: "A está contido em de B"). Podemos também afirmar de forma inversa que $B \supset A$ (B contém A).

A negativa dessa afirmação é $A \not\subset B$ (lê-se: "A não está contido em B") ou $B \not\supset A$ (lê-se: "B não contém A").

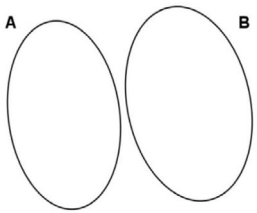
Exemplos:

- $\{a, 1\} \subset \{a, b, 1, d\}$;
- $\{a\} \subset \{a, 2\}$;
- $\{a, b\} \subset \{a, b\}$;
- $\{x \mid x \text{ é } par\ ou\ ímpar\} \supset \{x \mid x \text{ é } par\}$.

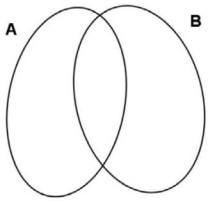
Representação por diagrama:



$A \subset B$ *ou* $B \supset A$



$A \not\subset B$ *ou* $B \not\supset A$



$A \not\subset B$ *ou* $B \not\supset A$

SAIBA MAIS!

Os símbolos para relacionar elemento com conjunto são exclusivamente: ∈ (pertence) e ∉ (não pertence). Para relacionar conjunto com conjunto usamos os símbolos: ⊂, ⊄, ⊃, ⊅, ∩ e ∪. Exemplo: Não indicamos {1} ∈ A, pois o conjunto "{1}" entre as chaves sem contexto que o defina como elemento, representa um conjunto, assim como: A ∈ B, {1,2,3} ∉ {1,2,4}, também não devem ser indicados.

Quantidade de subconjuntos: A quantidade de subconjuntos de um conjunto finito é também finito e pode ser calculado sem a necessidade de descrevê-los e em seguida contá-los.

Para entender a fórmula a seguir, vamos exemplificar.

Seja $A = \{a, b, c\}$, todos os seus subconjuntos possíveis são

$$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \emptyset\}.$$

Um total de 8 subconjuntos.

É importante observar que conjunto vazio foi incluído como subconjunto de A, pois **o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto**.

A demonstração desse fato parte de duas únicas possibilidades: $\emptyset \subset A$ ou $\emptyset \not\subset A$. Para que a última seja verdadeira, seria necessário que pelo menos um elemento pertencente ao conjunto vazio não pertencesse ao conjunto A, o que é um absurdo, uma vez que o conjunto vazio não possui elementos. Portanto, $\emptyset \subset A$.

A quantidade de subconjuntos de qualquer conjuntos é dado por:

$$Q_s = 2^n$$

Onde: Q_s é a quantidade de subconjuntos e n a quantidade de elementos do conjunto a ser calculado.

A demonstração dessa fórmula é simples e utiliza conhecimento de análise combinatória. Basta observar que para cada elemento do conjunto há somente duas possibilidades: ou ele pertence ao conjunto ou ele não pertence ao conjunto. Assim,

pelo princípio fundamental da contagem[1], multiplicamos as possibilidades de cada elemento: $\underbrace{2.2.2.2 \ldots 2}_{n\ elementos}$, o que é equivalente a 2^n.

1º exemplo: Quantos subconjuntos podemos formar com o conjunto dos divisores positivos de 5?

Solução: Os divisores positivos de 5 são: {1, 5} ⇒ 2 elementos. Portanto, o número de subconjuntos é : $2^2 = 2.2 = 4$ subconjuntos. São eles: {∅, {1}, {5}, {1, 5}}.

2º exemplo: Quantos subconjuntos possui o conjunto $P = \{x \mid x \text{ é } primo\ menor\ que\ 32\}$?

Solução: Os números primos são números que possuem apenas dois divisores: o 1 e ele mesmo. Nesse caso, há 11 números primos menores que 32, são eles: P = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31}. O que nos dá

$$2^{11} = \underbrace{2.2.2.2.2.2.2.2.2.2.2}_{11\ vezes} = 2048 \text{ subconjuntos.}$$

3º exemplo: Se um conjunto possui 256 subconjuntos, quantos são os seus elementos?

Solução: Temos que fazer o inverso das soluções anteriores, ou seja, precisamos encontrar um número que posto no lugar do n na formula $Q_s = 2^n$, tenha como resultado o 256. Por tentativas e erros, podemos encontrar tal número, no entanto, há uma forma prática de encontrar esse número usando a decomposição do número 256. Veja a seguir.

256	2
128	2
64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

2^8

Resposta: 8 elementos.

SAIBA MAIS!

Algoritmo da decomposição de um número em fatores primos: *Primeiramente, procuramos o menor número primo que divide o número desejado. Iniciamos com 2, depois 3, 5, 7, 11, 13, e assim por diante. Uma vez encontrado o menor número primo que divide o número, realizamos divisões sucessivas até chegarmos ao quociente 1.*

No caso específico da fórmula utilizada, o número será sempre divisível por 2 (devido à natureza da fórmula 2^n). Portanto, podemos realizar divisões sucessivas do número por 2 até chegarmos ao quociente 1, como exemplificado ao lado.

[1] Esse conteúdo será abordado na unidade 15 – volume 3. Outra demonstração pode ser feita utilizando teorema das linhas – teorema 15.2.1 no mesmo volume.

EXERCÍCIOS 1.1

1) Dê os elementos dos seguintes conjuntos:

$A = \{x \mid x \text{ é letra da palavra caderno}\}$;

$B = \{x \mid x \text{ é nome do dedo da mão}\}$;

$C = \{x \mid x \text{ é capital de um estado brasileiro que começa com a letra } R\}$.

2) Descreva e represente usando o diagrama, os elementos dos seguintes conjuntos:

a)A é o conjunto dos múltiplos inteiros de 5, entre -11 e +16;

b)B é o conjunto dos divisores inteiros de 35;

c)C é o conjunto dos múltiplos inteiros positivos de 7 menores que 7;

d)D é o conjunto dos números primos entre 6 e 51.

3) Descreva por meio de uma propriedade dos elementos:

$A = \{-4, -2, -1, 1, 2, 4\}$; $C = \{a, i, d, v\}$;

$B = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$; $D = \{Brasília\}$.

4) Dados $A = \{1, 2, 3, a, b\}$ e $B = \{2, 3, b\}$. Use a simbologia para afirmar que:

a) 7 não é elemento de A.

b) B não contém A.

c) 1 não pertence a B.

d) A contém B.

e) {-1} não está contido em A.

f) $\{1, 2, 3, a, b\}$ contém A.

5) Ainda sobre os conjuntos $A = \{1, 2, 3, a, b\}$ e $B = \{2, 3, b\}$, classifique as sentenças em falsa (F) ou verdadeira (V).

a) $3 \in A$( ). *e)* $4 \in B$( ). h) $B \in A$( ).

b) $2 \subset B$( ). f) $a \subset A$ ( ). i) $A \not\supset B$ ( ).

c) $B \subset A$ ( ). g) $\{a\} \subset A$ ( ). j) $\{2, 3, b\} \subset A$ ( ).

d) $B = A$( ).

6) Sendo A = $\{1,2\}$, B = $\{2,3\}$ e C = $\{1,2,3,4\}$. Classifique em V ou F cada sentença abaixo.

a) $A \subset C$ ( ). e) $A = B$ ( ). i) $B \subset \{1,2,3\}$ ( ).

b) $A \subset B$ ( ). f) $A \not\supset B$ ( ). j) $\{1,2\} \subset \{1,2,3,4\}$( ).

c) $B \in C$ ( ). g) $3 \subset C$( ).

d) $C \supset B$ ( ). h) $\{2,3\} \subset C$( ).

7) Represente graficamente (usando diagrama) a seguinte afirmação: "Todo matemático é inteligente, mas nem todo ser inteligente é matemático."

8) Quantos subconjuntos possui o conjunto B = $\{x \mid x$ é um número par positivo menor que 15$\}$?

9) Se um conjunto A possui 1024 subconjuntos, quantos elementos ele possui?

1.1.5. União, interseção e diferença de conjuntos

União de conjuntos: A reunião dos conjuntos A e B é o conjunto de todos os elementos que pertencem ao conjunto A ou ao conjunto B.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Lê-se: "A união B é igual a x, tal que x pertence a A ou x pertence a B"

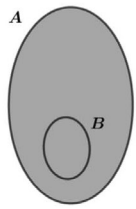
Exemplo: Se $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{a, e, i, o, u\}$, então

$$A \cup B = \{1,2,3,4,a,e,i,o,u\}.$$

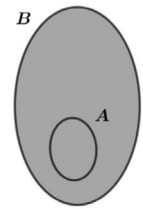
2º exemplo: Se $A = \{a,b\}$ e $B = \{a,b,c,d\}$, então

$A \cup B = \{a,b,c,d\} = B$. Observe que $A \subset B$, por consequência, $A \cup B = B$.

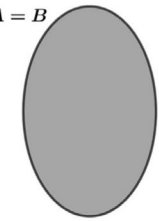
Diagrama de A ∪ B: A parte destacada (de cinza) representa a região $A \cup B$ nos casos possíveis a seguir:



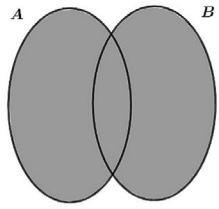
Quando $B \subset A$.



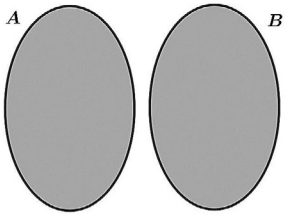
Quando $A \subset B$.



Quando $A = B$.



Quando A e B possuem alguns elementos em comum.



Quando A e B não possuem elementos em comum.

3º exemplo: Dados os conjuntos A e B abaixo, calcule $A \cup B$.

$A = \{x \mid x \text{ é } \textit{ímpar positivo menor que } 10\}$.

$B = \{x \mid x \text{ é } \textit{primo menor que } 10\}$.

Solução: $A = \{1,3,5,7,9\}$ e $B = \{2,3,5,7\}$.

$A \cup B = \{1,2,3,5,7,9\}$ (elementos que pertencem a A ou pertencem a B)

Interseção de conjuntos: A interseção dos conjuntos A e B é o conjunto de todos os elementos que pertencem ao conjunto A e ao conjunto B. Em outras palavras, é o conjunto formado pelos elementos comuns aos dois conjuntos.

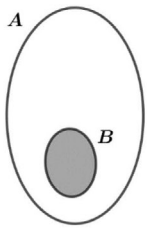
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \, e \, x \in B\}$$

Lê-se: "A interseção B é igual a x, tal que x pertence a A e x pertence a B"

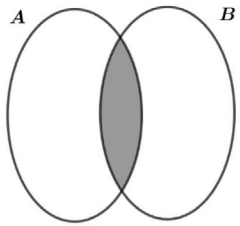
Exemplo: Se $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{a,e,i,o,u\}$, então $A \cap B = \{\}$.

2º exemplo: Se $A = \{a,b\}$ e $B = \{a,b,c,d\}$, então $A \cap B = \{a,b\} = A$, observe que $A \subset B$, por esse motivo, $A \cap B = A$.

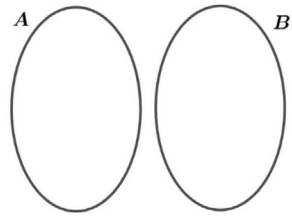
Diagrama $A \cap B$: A parte cinza destacada a seguir, representa $A \cap B$.



Quando $B \subset A$.



Quando A e B possui alguns elementos em comum.



Quando A e B são disjuntos, ou seja, $A \cap B = \emptyset$.

3º exemplo: Sejam

$$A = \{x \mid x \text{ é } positivo, múltiplo \; de \; 5 \; e \; menor \; que \; 21\} \; e$$
$$B = \{x \mid x \text{ é } positivo, múltiplo \; de \; 3 \; e \; menor \; que \; 19\},$$

calcule $A \cup B$ e $A \cap B$.

Solução:

$A = \{5,10,15,20\}$ e $B = \{3,6,9,12,15,18\}$.

$A \cup B = \{3,5,6,9,10,12,15,18,20\}$ (elementos que pertencem a A ou a B).

$A \cap B = \{15\}$ (elemento comum aos dois conjuntos).

4º exemplo: O conjunto dos números pares positivos e o conjunto dos números primos maiores que 2, são disjuntos?

Solução:

$Pares \; positivos = \{2,4,6,8,10,\ldots\}$ e $primos \; maiores \; que \; 2 = \{3,5,7,11,13,\ldots\}$.

Logo: $A \cap B = \emptyset$.

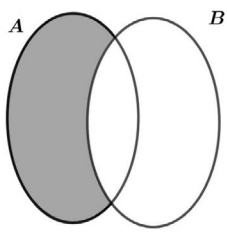
Resposta: São disjuntos (não possuem elementos em comum).

Diferença de conjuntos: A diferença entre os conjuntos A e B é o conjunto de todos os elementos que pertencem ao conjunto A e não pertencem ao conjunto B.

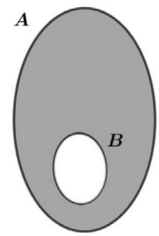
$$A - B = \{x \mid x \in A \, e \, x \notin B\}$$

Lê-se: "A menos B é igual a x, tal que x pertence a A e x não pertence a B"

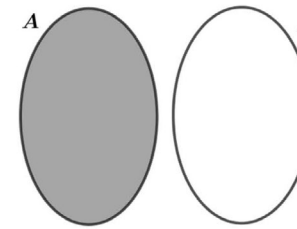
Diagramas $A - B$: A região cinza destacada a seguir, representa $A - B$.



Quando $A \cap B \neq \emptyset$.



Quando $B \subset A$.



Quando A e B são disjuntos, ou seja, $A \cap B = \emptyset$.

Um caso particular de $A - B$ é quando $B \subset A$. Nesse caso, denominamos de complementar de A em relação a B e usamos a notação C_A^B *ou* A^C para representá-lo.

Exemplo: Sendo $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{b, c, d, f\}$. Quais os elementos que pertencem a A e não pertencem a B?

Solução: $\{a\}$. Então, $A - B = \{a\}$.

2º exemplo: Se $A = \{x, y, z, h\}$ e $B = \{a, d, x, h\}$, então

$$A - B = \{y, z\} \text{ e } B - A = \{a, d\}.$$

3º exemplo: Sendo $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 2\}$, calcule C_A^B.

Solução: $C_A^B = \{3,4\}$(elementos que pertencem a A e não pertencem a B).

4º exemplo: Represente usando o diagrama o conjunto A – B, sabendo que A e B não são disjuntos, que $A \not\subset B$ e $B \not\subset A$.

Solução: A parte cinza destacada na figura 1.1.5.1 representa A – B.

5º exemplo: Se $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ e $B = \{a, b, e, g\}$, calcule A^C e represente no diagrama.

Solução: $A^C = \{c, d, f\}$. Verifique no diagrama da figura 1.1.5.2 a parte cinza que falta ao conjunto A para ser igual ao conjunto B.

6º exemplo: Sejam os conjuntos A = $\{x|x \text{ é } divisor\ de\ 4\}$, B = $\{x|x \text{ é } múltiplo\ de\ 2, maior\ que -3\ e\ menor\ que\ 3\}$ e C = $\{-2,-1,0\}$. Calcule e represente no diagrama os seguintes conjuntos:

a) $(A \cup C) - B$.

Solução: Pelas informações, temos que

A = { -4, -2, -1, 1, 2, 4} , B = { -2, 0, 2} e C = {0, -1, -2}.

(A ∪ C) = { -4, -2, -1, 0, 1, 2, 4}.

(A ∪ C) – B = {-4, -1, 1, 4} (elementos que pertencem (A ∪ C) e não pertence a B).

Veja o diagrama de (A ∪ C) – B representado na figura 1.1.5.3.

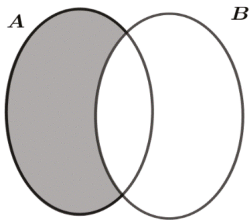


Figura 1.1.5.1

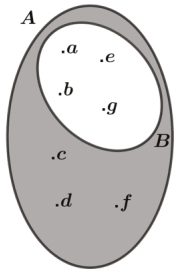


Figura 1.1.5.2

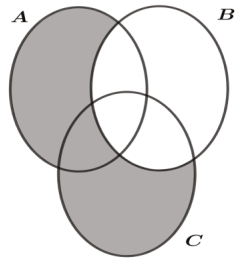


Figura 1.1.5.3

b) $A \cap B \cap C$.

Solução:

A ∩ B ∩ C = {-2}, elemento comum aos três conjuntos.

Veja o diagrama que representa A ∩ B ∩ C na figura 1.1.5.4.

c) $(A \cup B) \cap C$.

Solução:

(A ∪ B) = { -4, -2, -1, 0, 1, 2, 4}.

(A ∪ B) ∩ C = { -2, -1, 0 }.

Veja o diagrama que representa (A ∪ B) ∩ C na figura 1.1.5.5.

SAIBA MAIS!

Nas operações com três ou mais conjuntos envolvendo parênteses, resolve-se primeiro a operação dentro dos parênteses. Caso não existam, a resolução é feita na ordem em que as operações naturalmente se apresentam.

d) $(A \cup B) - (A \cap B)$.

Solução:

(A ∪ B) = { -4, -2, -1, 0, 1, 2, 4}.

(A ∩ B) = { -2, 2 }.

(A ∪ B) – (A ∩ B) ={ -4, -1, 0, 1, 4}.

e) $(A - B) \cup (B - A)$.

Solução:

(A – B) = { -4, -1, 0, 1, 4}.

$(B - A) = \{0\}$.

$(A - B) \cup (B - A) = \{-4, -1, 0, 1, 4\}$.

Essa questão e a anterior são equivalentes, ou seja, $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$. Essa equivalência fica ainda mais evidente quando analisamos o diagrama de ambas as expressões na figura 1.1.5.6.

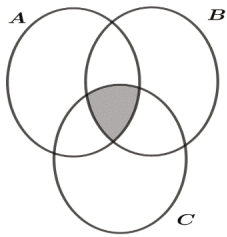


Figura 1.1.5.4

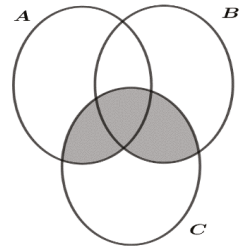


Figura 1.1.5.5

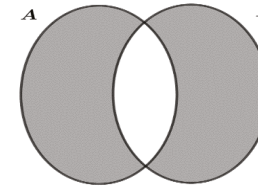


Figura 1.1.5.6

7º exemplo: Determine os conjuntos A, B e C que satisfazem as seguintes condições:

1º) $A \cup B \cup C = \{x, y, z, u, s, t\}$;

2º) $A \cap B = \{s, t\}$;

3º) $B \cap C = \{u, z\}$;

4º) $C \cap A = \{\}$;

5º) $C - B = \{y\}$;

6º) $A - B = \{x\}$.

Solução: Preenchendo o diagrama de acordo com as informações:

– Do 2º item, temos que s e t são elementos de A e B;

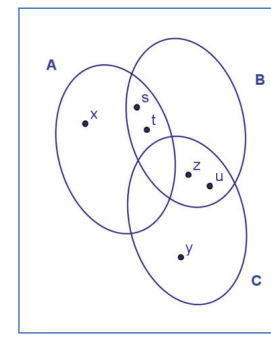
– Do 3º item, temos que u e z são elementos de B e C;

– Do 5º, temos que o y pertence a C e não pertence a B;

– Do 6º, que x pertence a A e não pertence a B.

Ao preencher o diagrama, os resultados confirmam o 4º item, $C \cap A = \{\}$ e o 1º item, $A \cup B \cup C = \{x, y, z, u, s, t\}$.

Resposta: $A = \{x, s, t\}$, $B = \{s, t, u, z\}$ e $C = \{y, u, z\}$.



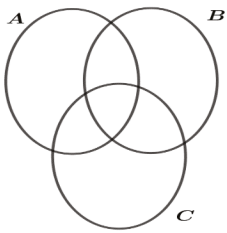
EXERCÍCIOS 1.2

1)Sejam os conjuntos $A = \{10, 11, 12, 13\}, B = \{12, 13, 14, 15, 16\}$ e $C = \{11,13,14,16\}$. Determine:

a) A – B
b) B – A
c) C – B
d) (A ∪ C) – B
e) A – (B ∩ C)
f) (A ∪ B) – (A ∩ C)

2)Represente no diagrama da figura os seguintes conjuntos, pintando ou destacando a região que representa cada caso:

a) A – B
b) A – (B ∩ A)
c) B – (A ∩ B)
d) (A ∪ B) – (A ∩ B)
e) A ∩ B ∩ C
f) B ∩ (A ∪ C)
g) (A ∩ B) – (A ∩ B ∩ C)
h) (B – (A ∩ B)) ∩ C



3)Seja os conjuntos:

$A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$;
$B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$;
$C = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$.

Determine:

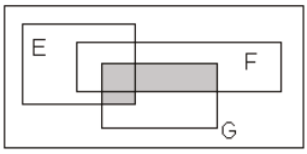
a) A ∩ B ∩ C
b) B U (A ∩ C)
c) (A – B) ∩ (C – A)
d) (A U B) – (C U B)
e) (A - C) U (C - B)
f) (B ∩ A) U (A ∩ C)

4)Determine os conjuntos A, B e C que satisfazem as seguintes condições:

1º) A U B U C = {a, b, c, d, e, f, g, h, i};
2º) A ∩ B = {f, g};
3º) B ∩ C = {b, f};
4º) C ∩ A = {e, f};
5º) A U C = {b, c, d, e, f, g, h, i};
6º) A U B = {a, b, e, f, g, h, i}.

5)(UBERABA) No diagrama, a parte rachurada representa:

a) (E ∩ F) ∩ G
b) (E ∩ G)
c) G ∩ (E ∪ F)
d) (E ∩ F) ∪ (F ∩ G)
e) (E ∪ F) ∪ G

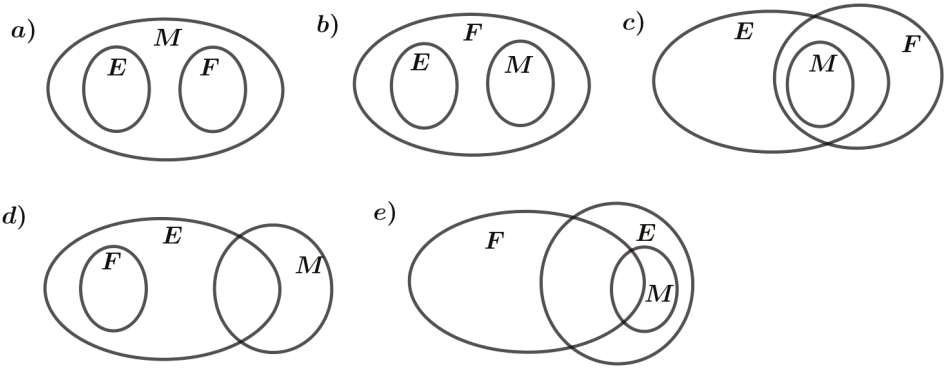


6) (UFG) A afirmação "Todo jovem que gosta de matemática adora esportes e festas" pode ser representada segundo o diagrama:

M = {jovens que gostam de matemática}

E = { jovens que adoram esportes }

F = { jovens que adoram festas }



7)Classifique em V ou F as seguintes sentenças, para A e B quaisquer:

a) ( ) $(A \subset B \Rightarrow C_B^A \subset A$

b) ( ) $(A - B) = (B - A)$

c) ( ) $B \subset A \, e \, A \subset B \Rightarrow A = B$

d) ( ) $A \in (A \cup B)$

e) ( ) $\emptyset \subset (A \cap B)$

f) ( ) $(A - B) \supset \emptyset$

g) ( ) $(A - B) \subset B$

h) ( ) $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$

i) ( ) $A - (A \cap B) = A - B$

j) ( ) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

8)Existem três tipos de pragas P = {P_1, P_2, P_3} que podem atingir um cultivo de um determinado fruto. De quantas formas diferentes, uma amostra desse cultivo pode apresentar ou não os sintomas dessas pragas?

9)Pretende-se fazer vitaminas (ou sucos) com as seguintes frutas: maçã, mamão, banana e laranja. Quantas vitaminas diferentes pode-se fazer com essas frutas?

1.1.6. Resolução de problemas envolvendo conjuntos

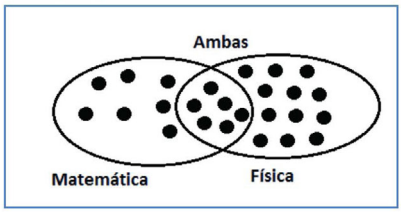
Nessa subseção, abordaremos problemas contextualizados que utilizam os conhecimentos sobre conjuntos e suas operações como solução.

Exemplo: Em uma turma, 13 alunos estudam matemática, 18 estudam física e 6 estudam ambas as disciplinas. Se ninguém estuda outra disciplina, além das mencionadas, quantos alunos estudam nessa turma?

Solução: A resposta não é: $13 + 18 + 6 = 37$. Pois, na quantidade de 13 alunos que estudam matemática, estão incluídos os 6 alunos que estudam ambas as disciplinas, assim como, na quantidade de 18 alunos que estudam física, também estão incluídos os 6 que estudam ambas. Portanto, temos que subtrair de cada uma, a quantidade de 6 alunos.

$(13 - 6) + (18 - 6) + 6 = 7 + 12 + 6 = 25.$

Resposta: 25 alunos, sendo que 7 estudam "só matemática", 12 "só física" e 6 estudam ambas as disciplinas. Veja o diagrama ao lado.



Perceba que na conta (13 – 6) + (18 – 6) + 6, poderíamos ter cancelado o +6 com o -6, e restaria: 13+18 – 6 = 25, ou seja, o número total de alunos é a quantidade de alunos que estudam matemática, mais a quantidade de alunos que estudam física, menos a quantidade de alunos que estudam ambas as disciplinas. Esse entendimento é uma particularidade para dois conjuntos quaisquer, isto é,

$$n(A \cup B) = n(A - B) + n(B - A) + n(A \cap B).$$

Demonstração: Conforme a figura 1.1.6.1, temos que

$n(A \cup B) = n(A - B) + n(B - A) + n(A \cap B).$

Além disso,

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$
$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B).$$

Substituindo, dispomos de

$$n(A \cup B) = n(A) - n(A \cap B) + n(B) - n(A \cap B) + n(A \cap B).$$

O que prova que $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

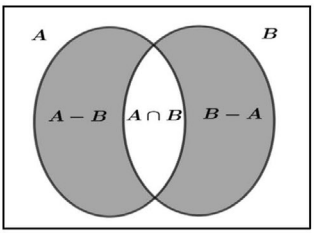


Figura 1.1.6.1

2º exemplo: Em uma pesquisa realizada numa comunidade que desenvolve agricultura familiar, constatou-se que 150 famílias plantam abacaxi, 120 famílias plantam banana e 50, ambos os frutos. Se 80 famílias não plantam nenhum desses frutos, quantas famílias foram consultadas nessa pesquisa?

Solução:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

$$n(A \cup B) = 150 + 120 - 50 \Rightarrow \boxed{n(A \cup B) = 220}.$$

Assim, 220 famílias plantam abacaxi ou banana. Ao adicionar as 80 famílias que não plantam nenhum desses frutos, dispomos de $220 + 80 = 300$ famílias.

Podemos aplicar o mesmo entendimento para resolver problemas envolvendo três conjuntos, utilizando a seguinte fórmula:

$$(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

Demonstração:

$$n(A \cup B \cup C) = n\big((A \cup B) \cup C\big) \Rightarrow$$

$$n(A \cup B \cup C) = n(A \cup B) + n(C) - n\big((A \cup B) \cap C\big) =$$

$$n(A) + n(B) - n(A \cap B) + n(C) - n\big((A \cup B) \cap C\big).$$

Pela figura 1.1.6.2, temos que

$$n(A \cup B) \cap C) = n(A \cap C) + n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C).$$

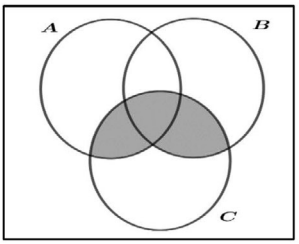


Figura 1.1.6.2

Substituindo, encontramos

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) + n(C)$$

$$- [n(A \cap C) + n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C)] \Rightarrow$$

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) + n(C) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

Demonstrando a fórmula.

3º exemplo: (UF - Viçosa) Fez-se em uma população, uma pesquisa de mercado sobre o consumo de sabão em pó de três marcas distintas A, B e C. Em relação à população consultada e com o auxílio dos resultados da pesquisa tabelados abaixo:

Marcas	**A**	**B**	**C**	**A e B**	**A e C**	**B e C**	**A, B e C**	Nenhuma delas
Nº de Consumidores	109	203	162	25	28	41	5	115

Determine:

I) O número de pessoas consultadas.

II) O número de pessoas que não consomem as marcas A ou C.

III) O número de pessoas que consomem pelo menos duas marcas.

IV) A porcentagem de pessoas que consomem as marcas A e B, mas não consomem a marca C.

V) A porcentagem de pessoas que consomem apenas a marca C.

a) I)300 II)257 III) 42 IV) 4% V) 19,6%
b) I)250 II)257 III) 84 IV) 4% V) 8,3%
c) I)500 II)257 III) 42 IV) 4% V) 8,3%
d) I)500 II)257 III) 84 IV) 4% V) 19,6%
e) I)250 II)257 III) 42 IV) 4% V) 8,3%

SAIBA MAIS!

É aconselhável sempre construir um diagrama para melhor visualização do problema.

Solução:

Iremos construir o diagrama a cada informação.

I) Sabemos que: $(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$, então: $n(A \cup B \cup C) = 109 + 203 + 162 - 25 - 28 - 41 + 5 = 385$.

Como há 115 pessoas que não consomem nenhuma marca, o número de pessoas consultadas é $385 + 115 = 500$ pessoas.

Antes de prosseguir, vamos preencher o diagrama com as informações:

$n(A \cap B) - n(A \cap B \cap C) = 25 - 5 = 20$;

$n(A \cap C) - n(A \cap B \cap C) = 28 - 5 = 23$;

$n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C) = 41 - 5 = 36$.

O diagrama está na figura 1.1.6.3.

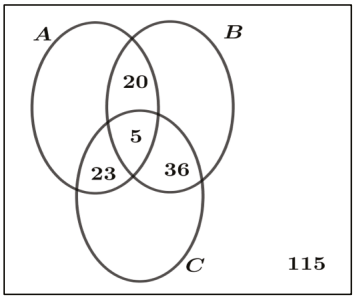


Figura 1.1.6.3

Como $n(A) = 109$, então o número de pessoas que consomem exclusivamente a marca A é

$109 - 20 - 23 - 5 = 61$.

Como $n(B) = 203$, então o número de pessoas que consomem exclusivamente a marca B é $203 - 20 - 36 - 5 = 142$.

Como $n(C) = 162$, então o número de pessoas que consomem exclusivamente a marca C é $162 - 23 - 36 - 5 = 98$.

O diagrama completo está na figura 1.1.6.4.

II) As pessoas que não consomem a marca A e C, são as que consomem exclusivamente a marca B, ou seja, 142 mais as que não consomem nenhuma das marcas:

$142 + 115 = 257$.

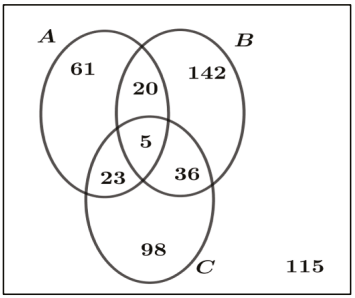


Figura 1.1.6.4

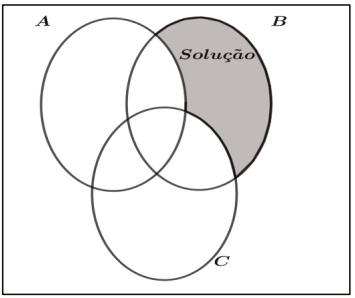


Figura 1.1.6.5

Outra forma de calcular é perceber que o valor solicitado é $n(B) - n(A \cap B) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) = 203 - 25 - 41 + 5 = 142$, mais 115 pessoas que não consomem nenhuma marca: $142 + 115 = 257$. Observe o diagrama da figura 1.1.6.5 que justifica o cálculo.

III) Pelo diagrama da figura 1.1.6.4 percebemos que a resposta é $20+23+5+36 = 84$ pessoas.

Vamos calcular de outra forma. As pessoas que consomem exclusivamente uma marca é $142 + 61 + 98 = 301$ pessoas, então a quantidade de pessoas que consomem ao "menos duas marcas", ou seja, que não consomem uma única marca é:

$n(A \cup B \cup C) = 109 + 203 + 162 - 25 - 28 - 41 + 5 = 385$ (total).

Resposta: $385 - 301 = 84$ pessoas.

IV) Perceba que a pergunta é "consomem A e B" (intersecção). Assim, pelo diagrama dispomos de 20, como é a porcentagem em relação ao total, temos: $\frac{20}{500} = 4\%$.

Outra forma: $n(A \cap B) - n(A \cap B \cap C) = 25 - 5 = 20 \Rightarrow \frac{20}{500} = 4\%$.

V) Pelo diagrama: $\frac{98}{500} = 19{,}6\%$.

Resposta: Letra d.

Porcentagem: divide-se o valor desejado pelo total e multiplica-se por 100: $\frac{20}{500} \times 100 = 0{,}04 \times 100 = 4\%$. Esse conteúdo será visto na próxima unidade.

4º exemplo: (UFSE) Os senhores A, B e C concorriam à liderança de certo partido político. Para escolher o líder, cada eleitor votou apenas em dois candidatos de sua preferência. Houve 100 votos para A e B, 80 votos para B e C e 20 votos para A e C. Em consequência:

a) venceu A, com 120 votos.
b) venceu A, com 140 votos.
c) A e B empataram em primeiro lugar.
d) venceu B, com 140 votos.
e) venceu B, com 180 votos.

Solução: Os 100 primeiros votos foram para o candidato A e B, então ambos receberam 100 votos. Os 80 votos seguintes foram para os candidatos B e C, logo receberam 80 votos cada um e por fim, os candidatos A e C receberam 20 votos cada. Contabilizando:

– O candidato A recebeu $= 100 + 20 = 120$.
– O candidato B recebeu $= 100 + 80 = 180$ (Resposta: letra e).
– O candidato C recebeu $= 80 + 20 = 100$.

EXERCÍCIOS 1.3

1) Se os conjuntos A, B e (A ∩ B) possuem 4, 5 e 3 elementos, respectivamente. Qual o número de elementos de A ∪ B?

2) Sejam os conjuntos A, B e A ∩ B com 300, 600 e 200 elementos, respectivamente. Calcule o número de elementos do conjunto:

a) A − B;
b) B − A;
c) A ∪ B.

3) Em uma escola, 220 alunos estudam Física, 160 alunos estudam Química e 50 alunos estudam ambas as disciplinas. Se a escola possui um total de 400 alunos:

a) Quantos alunos estudam Física ou Química?
b) Quantos alunos não estudam nenhuma das duas?

4) Dados dois conjuntos A e B não vazios. Se $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $A - B = \{a, b, d\}$ e $A \cap B = \{f, g\}$, calcule os conjuntos A e B.

5) (UNESP) Se A = {2, 3, 5, 6, 7, 8}, B = {1, 2, 3, 6, 8} e C = {1, 4, 6, 8}, então:

a) (A − B) ∩ C = {1, 2};
b) (B − A) ∩ C = {1};
c) (A − B) ∩ C = {1};
d) (B − A) ∩ C = {2};
e) n.d.a.

6) (FAAP) Numa prova constituída de dois problemas, 300 alunos acertaram somente um deles, 260 o segundo, 100 alunos acertaram os dois e 210 erraram o primeiro, quantos alunos fizeram a prova?

7) (UERJ) Em um posto de saúde foram atendidas, em determinado dia, 160 pessoas com a mesma doença, apresentando, pelo menos, os sintomas de diarreia, febre ou dor no corpo, isoladamente ou não. A partir dos dados registrados nas fichas de atendimento dessas pessoas, foi elaborada a tabela abaixo:

SINTOMAS	FREQUÊNCIA
Diarreia	62
Febre	62
Dor no corpo	72
Diarreia e febre	14
Diarreia e dor no corpo	08
Febre e dor no corpo	20
Diarreia, febre e dor no corpo	x

Na tabela, x corresponde ao número de pessoas que apresentaram, ao mesmo tempo, os três sintomas. Pode-se concluir que x é igual a:

a) 6 b) 8 c) 10 d) 12

8)(ENEM) Numa prova de matemática de duas questões, 35 alunos acertaram somente uma questão, 31 acertaram a primeira, 8 acertaram as duas e 40 erraram a segunda questão. Então, o número de alunos que fizeram essa prova foi:

a) 43; b) 48; c) 52; d) 56; e) 60.

9)(UFSE) Uma editora entrevistou 200 alunos de uma escola, verificando se haviam lido os livros A e B. Concluiu-se que 102 alunos leram o livro A, 32 leram ambos e 48 não leram esses livros. Quantos leram somente o livro B?

a) 152; b) 134; c) 82; d) 50; e) 30.

10)Em um sítio, cinquenta agricultores trabalham no inverno ou no verão. Vinte e cinco agricultores somente no verão e quinze somente no inverno. Se os agricultores trabalham ao menos em uma dessas estações, quantos agricultores trabalham no inverno e no verão?

11) Um pesquisa realizada em uma região rural com proprietários de terras, percebeu que 20% dos entrevistados não usam adubação alguma em suas plantações, enquanto que 40%, usam somente a adubação química e outros 30%, somente a adubação orgânica. Qual o percentual dos entrevistados que usam ambas as adubações?

12)Em uma propriedade o dono resolveu verificar a viabilidade do cultivo consorciado (cultivo de diferentes espécies na mesma área). Para isso, plantou na primeira área somente goiaba, na segunda área somente maracujá e na terceira área, os dois frutos juntos (consorciados). Se:

- A produção total de goiaba da propriedade foi de 2600 frutos;
- A produção total de maracujá da propriedade foi de 2400 frutos;
- A produção total da terceira área foi de 500 frutos.

Podemos afirmar que:

a) A produção total da primeira área foi de 2600 frutos;
b) A produção total da segunda área foi de 2400 frutos;
c) A produção total da primeira e segunda área foi de 5500 frutos;
d) A produção de goiaba na terceira área foi de 250 frutos;
e) Não é possível saber a produção exata de cada fruto em cada área.

13) Em uma pesquisa sobre o descarte de garrafas no lixo, contatou-se que entre os entrevistados:

- 80 descartam garrafas pet;
- 60 descartam garrafas de vidro;
- 20 reutilizam ambos;
- 20 descartam ambos.

Quantos pessoas foram entrevistadas?

14)Em uma pesquisa sobre as fontes de irrigação de uma determinada região, verificou-se que entre as propriedades consultadas:

- 60% usam água de rios ou açudes;
- 50% usam água de poços;
- 30% usam água de ambos (de rio ou açudes e também de poços).

Qual a porcentagem de propriedades consultadas que não usam nenhuma das fontes?

15)Uma pesquisa feita em uma feira livre de pescado para saber a preferência de 200 consumidores por três tipos de peixes: tambaqui, dourada e filhote, mostrou que, dos entrevistados: 20 consumiam os três tipos; 30 os peixes tambaqui e dourada; 50 os peixes dourada e filhote; 60 os peixes tambaqui e filhote; 120 o peixe tambaqui;75 o peixe dourada. Se todas as 200 pessoas entrevistadas deram preferência a pelo menos um dos tipos de peixe, pergunta-se:

a) Quantas pessoas consumiam o peixe filhote?
b) Quantas pessoas consumiam somente o tambaqui?
c) Quantas pessoas consumiam pelo menos dois tipos de peixe?
d) Quantas pessoas consumiam os peixes tambaqui e dourada, e não o filhote?

16)Uma pesquisa feita em propriedades rurais para saber a preferência entre os cultivos: abacaxi, melancia e melão, mostrou que, entre os entrevistados:

- 200 plantavam abacaxi;
- 150 plantavam melancia;
- 130 plantavam melão;
- 100 plantavam abacaxi e melão;
- 120 plantavam abacaxi e melancia;
- 60 plantavam melancia e melão;
- 50 plantavam os três cultivos;
- 20 não plantavam nenhum dos três frutos.

Diante das informações, responda:

a) Quantos plantavam somente abacaxi?
b) Quantos plantavam pelo menos dois desses frutos?
c) Quantos plantavam ao menos um desses frutos?
d) Quantos foram os entrevistados?

1.2. Conjuntos numéricos

Todo e qualquer número na Matemática, se enquadra em um ou mais conjuntos numéricos de acordo com suas características. As subseções seguintes abordarão esses conjuntos.

1.2.1. Conjunto dos números naturais (ℕ)

Foi o primeiro conjunto numérico. Surgiu a partir da necessidade do homem de contar. Os primeiros a utilizarem símbolos para representar números foram os egípcios, seguidos pelos babilônios, depois os romanos (apenas destacando os mais importantes) e finalmente os hindus e árabes. Estes últimos, criaram um sistema numérico posicional (o símbolo tem valor de acordo com sua posição), cujos símbolos (algarismos) sofreram várias modificações e adaptações, até chegar o que são hoje: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Depois de várias transformações por milênios, podemos hoje de forma concisa descrever os números naturais a partir das concepções axiomáticas de Peano[2], que estão a seguir.

Axiomas de Peano:

a) Todo número natural tem um único sucessor;

b) Números naturais diferentes têm sucessores diferentes;

c) Existe um único número natural, chamado um e representado pelo símbolo 1, que não é sucessor de nenhum outro;

d) Seja X um conjunto de números naturais (isto é, $X \subset N$). Se $1 \in X$ e se, além disso, o sucessor de todo elemento de X ainda pertence a X, então $X = N$.

Conforme esses axiomas temos os seguintes números naturais:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \ldots\}.$$

Representação na reta real:



Alguns livros didáticos adotam $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$, incluindo o zero como um número natural, mas isso é uma preferência apenas. Decidimos utilizar o conjunto dos naturais excluindo o zero, pois é coerente com os axiomas de Peano, com a história dos números, uma vez que o zero ainda não existia à época do surgimento desses números e com uma contagem natural, onde se inicia pelo número um e não pelo zero.

[2] Giuseppe Peano (1858-1932).

1.2.2. Conjunto dos números inteiros (ℤ)

Com a evolução da contagem, surgiu a contabilidade. Com a necessidade de representar o que se tem e o que falta, foram adicionados sinais anteriores aos números. O sinal "-" (menos) é usado para representar uma quantidade que falta, o sinal "+" (mais) é usado para representar o que se tem, e o zero (0) é usado como a negação dos dois. Isso permitiu a representação de situações de crédito e débito na contabilidade, o que foi crucial para o desenvolvimento das transações comerciais e financeiras. Essa nova representação de números ampliou o conjunto universo para:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Nota: Em uma reta real, os números negativos ficam à esquerda e o positivos à direita, separados pelo zero (que é neutro).

Representação na reta real:



Os números inteiros representavam apenas quantidades e não medições. Era possível, por exemplo, medir o comprimento de qualquer objeto, em uma unidade de medida qualquer e não ter um número inteiro. A partir daí surgiu o conjunto dos números racionais.

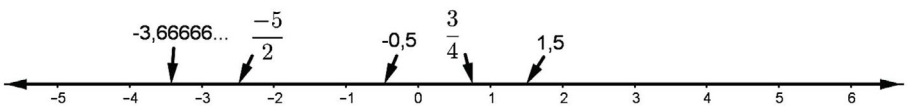
1.2.3. Conjunto dos números racionais (ℚ)

Representam partes de uma medida inteira. Podem estar em forma de fração ou decimal. Sua definição matemática pode ser assim expressa:

$$\{\mathbb{Q} = x | x = \frac{p}{q} \ (com\ p, q \in \mathbb{Z}\ e\ q \neq 0).$$

Ou assim definida: Um número racional é aquele que pode ser escrito (ou representado) na forma de fração $\frac{p}{q}$, onde p e q são números inteiros (com $q \neq 0$) denominados, respectivamente de **numerador** e de **denominador**.

Exemplos de alguns números racionais dispostos na reta real:



Denominamos de **números decimais** àqueles que apresentam vírgula em sua composição. Eles podem ser definidos como finitos, sem reticências. Exemplos: 3,9; -4,8; 70,33; etc. E também infinitos, com reticências, como:-2,3333...;

5,4864879481...; -40,32323232...

Todos os decimais finitos são números racionais, ou seja, é possível representá-los em forma de fração. Veja alguns exemplos com suas respectivas frações:

$$0{,}5 = \frac{1}{2} \qquad -5{,}35 = -\frac{107}{20} \qquad 0{,}0001 = \frac{1}{10000}.$$

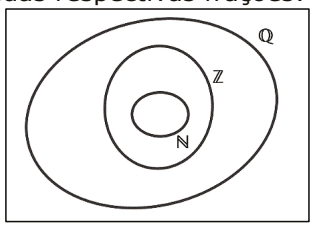
Quanto aos decimais infinitos, somente os que apresentam dízima periódica, isto é, somente os que possuem algarismos se repetindo periodicamente após a vírgula, é que são números racionais. Veja alguns exemplos com suas respectivas frações:

$$0{,}5555\ldots = \frac{5}{9} \qquad 0{,}737373\ldots = \frac{73}{99} \qquad -13{,}123123123\ldots = -\frac{13110}{999}.$$

Para completar o conjunto dos números racionais, temos os números naturais e inteiros, esses também são números racionais, pois é possível expressá-los também em forma de fração. Veja alguns exemplos com suas respectivas frações:

$$5 = \frac{10}{2} \qquad -2 = \frac{-16}{8} \qquad 0 = \frac{0}{3}.$$

Dessa forma, os conjuntos naturais, inteiros e racionais são representados da seguinte maneira: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, conforme o diagrama ao lado.



Os únicos números que ainda não classificamos quanto ao conjunto, são os números em forma de decimal infinito e sem dízima periódica, esse tipo de número se enquadra no conjuntos dos número irracionais a seguir.

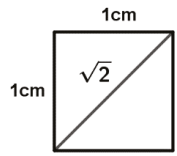
1.2.4. Conjunto dos números irracionais (𝕀)

É o conjunto formado pelos números decimais infinitos que não apresentam dízima periódica, ou seja, nesses números não há algarismos se repetindo periodicamente após a vírgula. Exemplos:

-9,14589751... -0,01568025184... 14,12358412...

Números com essa característica **não** podem ser expressos em forma de fração ou em outras palavras, não existem números inteiros p e q tais que $\frac{p}{q}$ tenha como resultado um número irracional.

Um exemplo clássico de um número irracional é a diagonal de um quadrado de lado 1cm. Vamos demonstrar que sua medida não é racional.



Supondo que p e q são primos entre si e que $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$. Temos

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow \boxed{p^2 = 2q^2}\,(*).$$

Analisando a expressão (*), podemos concluir que p é par, pois se o quadrado de um número é par, então ele é par. Considerando agora que p seja um par na forma $p = 2k$, com $k \in \mathbb{Z}$ e substituindo em (*), temos

$$(2k)^2 = 2q^2 \quad \Rightarrow \quad 4k^2 = 2q^2 \quad \Rightarrow \boxed{2\,k^2 = q^2} (**).$$

A expressão (**) nos revela que q também deve ser par, o que é um absurdo, pois p e q são primos entre si. Dessa forma, não existem p e q racionais tais que $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$.

Antigamente acreditava-se que qualquer segmento de reta de medida p, cabia exatamente uma quantidade n inteira de segmentos unitários q adotado como medida, em outros termos, que os valores de p e q eram sempre **comensuráveis** (sempre $p = n.q \Rightarrow p/q = n$). Essa ilusão de comensurabilidade incondicional entre duas medidas durou até meados de 25 a.c, quando alguns dos discípulos de Pitágoras descobriu exatamente o que provamos, a diagonal e o lado de um quadrado são **incomensuráveis** entre si.

A partir desse momento, surgiram os números irracionais que representam estritamente os segmentos incomensuráveis com a unidade de medida.

De uma forma geral, todo $\sqrt[n]{a}$ com a positivo, cuja raiz enésima é inexata, são números irracionais. Exemplos:

$\sqrt{3}$ =1,73205... $\quad -\sqrt{32} = -5{,}65685...$ $\quad \sqrt[4]{8} = 1{,}681793...$

Observe que são dízimas não periódicas.

Outro exemplo de número irracional, alvo de discussão por séculos e hoje demonstrada sua irracionalidade, é o número π = 3,14159..., que é a razão entre o perímetro de qualquer circunferência pelo seu diâmetro.

Diante das afirmações podemos concluir que:

Um número é irracional se possuir dízima não periódica ou for da forma $\sqrt[n]{a}$ se não possuir raiz enésima exata (com a não negativo para n par).

SAIBA MAIS!

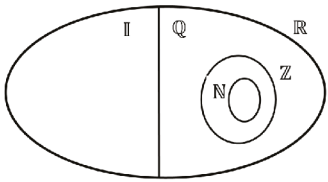
A visualização apenas dos algarismos iniciais de um número não é suficiente para garantir que não há repetição periódica. Exemplos:

- *3,142857... pode ser um número irracional, se estiver garantido que não há repetição de algarismos periodicamente ou pode ser um número racional representado pela fração* $\frac{22}{7} = 3{,}142857142857....$
- *0,000102030405060708 09...pode ser um número irracional ou os decimais da fração* $\frac{1}{9801}$.

Para evitar dubiedades, garantiremos nessa obra que, se os algarismos iniciais apresentados de um número não se repetem periodicamente, significa que de fato não se repetem, sendo tratados portanto, como números irracionais.

1.2.5. Conjunto dos números reais (ℝ):

É um conjunto formado por todos os números que já estudamos até aqui. O que significa que todos os conjuntos numéricos anteriores estão contidos nele. Veja a representação no diagrama seguinte.

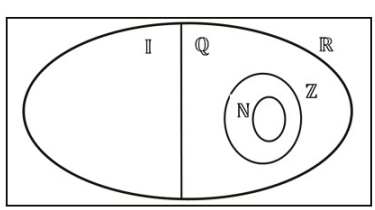


Observe pela representação que qualquer número (real):
- É racional ou irracional (e nunca os dois);
-Se for natural será também inteiro e também racional (a recíproca não é verdadeira);
-Se for inteiro será também racional (a recíproca também não é verdadeira).

1.2.6. Conjunto dos números complexos (ℂ)

É o conjunto universo onde se enquadram todos os conjuntos numéricos. Inclusive os números na forma $\sqrt[n]{a}$ com n par e a negativo, que no conjunto dos números reais não apresenta significado.

Os números pertencentes a esse conjunto apresentam duas partes: parte real (a) e a parte imaginária (b), escrito na seguinte forma $C = a + bi$, onde i é igual a $\sqrt{-1}$ denominada de unidade imaginária.



Todo número real é um número complexo, mas nem todo número complexo é um número real.
Exemplos: $\sqrt{-100}, \sqrt[4]{-13}, \sqrt[100]{-2} \in \mathbb{C}$ e $\notin \mathbb{R}$

Esse conjunto numérico será estudado em detalhes na unidade 16 - volume 3.

1.2.7. Intervalos numéricos

Definição 1.2.7.1: Dados dois números **reais** p e q, chama-se **intervalo** (ou intervalo numérico) a todo conjunto de todos os números reais compreendidos entre p e q, podendo inclusive incluir p e q. Os números p e q são os limites do intervalo, e se o intervalo incluir p e q, o intervalo é dito fechado, caso contrário, o intervalo é dito aberto.

A tabela abaixo define os diversos tipos de intervalos.

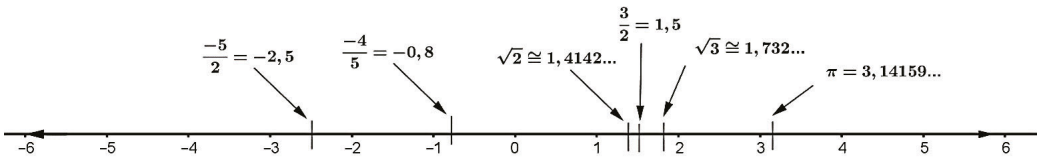
TIPOS	REPRESENTAÇÃO	INFORMAÇÃO
INTERVALO FECHADO	$[p, q] = \{x \in \mathbb{R} \mid p \leq x \leq q\}$	inclui os limites p e q
INTERVALO ABERTO	$(p, q) = \{x \in \mathbb{R} \mid p < x < q\}$	exclui os limites p e q
INTERVALO FECHADO A ESQUERDA	$[p, q) = \{x \in \mathbb{R} \mid p \leq x < q\}$	inclui p e exclui q
INTERVALO FECHADO À DIREITA	$(p, q] = \{x \in \mathbb{R} \mid p < x \leq q\}$	exclui p e inclui q
INTERVALO SEMI-FECHADO	$[p, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq p\}$	valores maiores ou iguais a p.
INTERVALO SEMI-FECHADO	$(-\infty, q] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq q\}$	valores menores ou iguais a q.
INTERVALO SEMI-ABERTO	$(-\infty, q) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < q\}$	valores menores do que q.
INTERVALO SEMI-ABERTO	$(p, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > p\}$	valores maiores do que p.

Um intervalo aberto pode ser também representado pelos colchetes inversos. Exemplos:

-]0,5[é o mesmo que (0,5);
-]-∞ ,-13[é o mesmo que (-∞, -13).

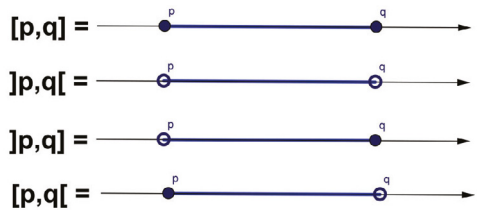
Os limites -∞ (menos infinito) e +∞ (mais infinito), por serem infinitos (e não um número real), devem ser representado como intervalo aberto.

A representação gráfica de um intervalo é feito sobre uma reta real. A seguir está um exemplo de uma reta real com alguns números dispostos:



RETA REAL

Usamos: ○ ⇒ para representar limite "aberto" e ● ⇒ para representar limite "fechado", da seguinte forma:

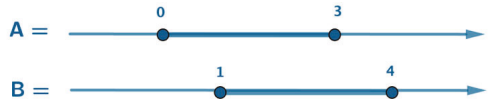


Envolvendo infinitos:



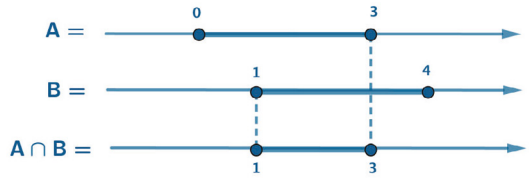
Exemplo: Utilizando a representação gráfica dos intervalos sobre a reta real, determine: $A \cap B$ e $A \cup B$, sendo $A = [0,3]$ e $B = [1,4]$.

Solução: Incialmente, representamos os conjuntos A e B em uma reta real, um abaixo do outro, tracejando (destacando) a região que representa cada intervalo.



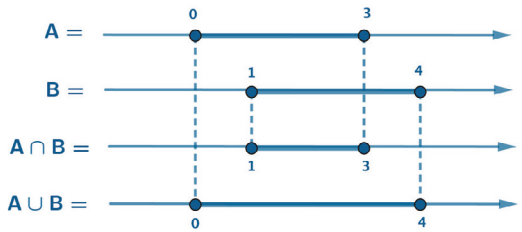
Em seguida analisamos os conjuntos a serem calculados:

• $A \cap B$ são todos os elementos que pertencem a A e a B. Nesse caso, verificamos a parte tracejada em comum dos intervalos.



Resultando em $A \cap B = [1,3]$.

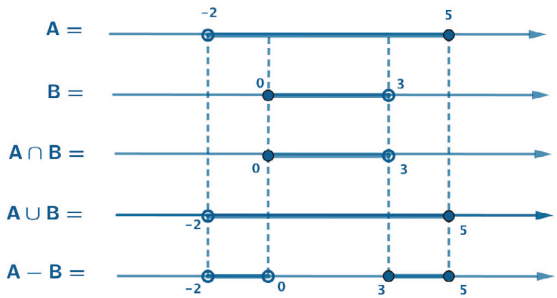
• $A \cup B$ são todos os elementos que pertencem a A ou a B. O que corresponde a verificarmos as partes que estão tracejadas em um conjunto ou em outro e não necessariamente nos dois conjuntos (intervalos).



Resposta: $A \cup B = [0,4]$.

2º exemplo: Calcule $A \cap B$, $A \cup B$ e $A - B$ sendo $A = (-2,5]$ e $B = [0,3)$.

Solução:



O intervalo $A - B$ são todos os elementos que pertencem a A e não pertencem a B. O que corresponde a verificarmos as partes que estão tracejadas em A e não estão tracejadas em B.

Resposta: $A \cap B = [0,3)$, $A \cup B = (-2,5]$ e $A - B = (-2,0) \cup [3,5]$.

3º exemplo: Associe V ou F a cada uma das seguintes afirmações.

a) (F) -7 ∉ [-8,0].

b) (F) 0 ∈ { $x \in \mathbb{R}$ | 0 < $x \leq 3$}.

c) (V) {-300, -10, -1} ⊂ (-∞,0].

d) (V) -3 ∈ { $x \in \mathbb{R}$ | -4 < $x \leq 1$}.

e) (V) $\mathbb{R} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$.

f) (F) $\mathbb{N} \cup (\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

EXERCÍCIOS 1.4

1)Quanto aos conjuntos numéricos, responda com **V** (verdadeiro) e **F** (falso) nas seguintes afirmações.

a) ( ) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$.

b) ( ) $1290 \in \mathbb{I}$.

c) ( ) $0{,}474747\ldots \in \mathbb{Q}$.

d) ( ) $0{,}23464309756467\ldots \in \mathbb{I}$.

e) ( ) $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q} \supset \mathbb{I} \supset \mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$.

f) ( ) $\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$.

g) ( ) $-4.567.009 \in \mathbb{Z}$.

h) ( ) $-4.567{,}009 \in \mathbb{Z}$.

i) ( ) $\sqrt{49} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

j) ( ) $\frac{1}{7} \in \mathbb{Q}$.

k) ( ) Todo número natural é racional.

l) ( ) Todo número racional é natural.

m) ( ) Todo número inteiro é natural.

n) ( ) Nem todo número natural é inteiro.

o) ( ) Todo número complexo é um número real.

p) ( ) A soma ou subtração de dois números racionais sempre é um número racional.

q) ( ) A soma ou subtração de dois números irracionais sempre é um número irracional.

r) ( ) A multiplicação de dois números racionais sempre é um número racional.

s) ( ) A multiplicação de dois números irracionais sempre é um número irracional.

t) ( ) Se um número tem representação decimal infinita e periódica, então esse número é irracional.

u) ( ) Todo número racional tem uma representação decimal finita.

v) ( ) $\sqrt[n]{a}$ é irracional se a raiz não for exata.

w) ( ) $\sqrt[n]{a}$ é racional se a raiz não for exata.

x) ( ) $\sqrt[n]{a}$ é um número real se a for negativo e n for par.

y) ( ) $\sqrt[n]{a}$ é um número complexo se a for negativo e n for par.

2)(UEL) Observe os seguintes números:

I. 2,212121...
II. 3,212223...
III. π/5
IV. 3,1416
V. $\sqrt{-4}$

Assinale a alternativa que identifica os números irracionais.

a) I e II b) I e IV c) II e III d) II e IV e) III e V

3)Represente sobre a reta real cada um dos seguintes conjuntos:

a)A = $\{ x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$.

b)B = $\{ x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 0\}$.

c) C = $\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0$ ou $x > 2\}$.

d)D = $\{ x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0$ ou $x \geq 3\}$.

4)Ache o conjunto solução em $\mathbb{R}$:

a)[0,2] ∩ [1,3].

b)] -∞, 2] ∩ [0, +∞).

c) [1,2] ∩[0,3] ∩[-1,4].

d)]-1, $\frac{2}{5}$ [∪]0, $\frac{4}{3}$[.

5)Determine o conjunto numérico solução:

a)$\mathbb{R} \cap \mathbb{Q}$.

b)$\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}$.

c) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Q}$.

d)$\mathbb{I} \cup \mathbb{Q}$.

e) $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

f) $(\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}) \cup \mathbb{Q}$.

g) $\mathbb{N} \cup (\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q})$.

h) $(\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}) \cap (\mathbb{N} \cap \mathbb{Q})$.

6)Considere os conjuntos: A = $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 8\}$, B = $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 13\}$, C = $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -3\}$ e D = $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 17\}$. Determine:

a) A ∩ B ∩ C.

b) B U (A ∩ D).

c) (A − D) ∩ (C − D).

d) (A U B) − (C U D).

7)(PUC-MG) Se $A =]-2, 3]$ e $B = [0, 5]$, então os números inteiros que estão em $B - A$ são:

a) -1 e 0

b) 1 e 0

c) 4 e 5

d) 3, 4 e 5

e) 0, 1, 2 e 3

8) Considerando os intervalos numéricos A = [-5, 15], B = [0, 5] e C = [-3, 8], a alternativa **incorreta** é:

a) $A \cup B = A$

b) $A \cap B = B$

a) $A \cup B \cup C = A$

d) $A \cap B \cap C = B$

e) $A \cap B \cap C = C$

1.3. Razão

Definição 1.3.1: Dados dois números a e b ($b \neq 0$), denominamos de **razão** de a para b (ou **razão** de a entre b) o quociente: $\frac{a}{b}$.

O conceito de razão é um dos mais simples da matemática, consiste em dividir uma grandeza[3] pela outra. E o resultado dessa razão pode ser outra grandeza já definida ou um simples quociente sem unidade de medida.

Existem várias aplicações de razão nas ciências agrárias. Veja alguns exemplos.

1º exemplo: O hectare é ultimamente a medida mais empregada em área de fazendas, chácaras, sítios, regiões de plantações e loteamentos rurais, equivalendo a uma região de 10.000 m². O alqueire foi uma das medidas agrárias mais utilizadas pelos fazendeiros, mas atualmente ele é considerado uma medição imprópria, em virtude das diferentes quantidades de m² utilizados pelos estados brasileiros. O alqueire paulista é equivalente a 24.200 m², o mineiro e o goiano correspondem a 48.400 m², enquanto que o alqueire da região Norte é igual a 27.225 m². Essa inconsistência de medidas entre os estados e a deficiência organizacional quanto à equiparação da unidade alqueire, tem contribuído para que os proprietários de terras abandonem esta unidade de medição, prevalecendo uma medida de padrão nacional, como o hectare.

Fonte: (SILVA, 2018)

Com base no texto, quantos hectares equivale um alqueire da região Norte?

Solução: $\frac{27.225}{10.000} = 2{,}7225\ hectares.$

Consulte outras grandezas com suas unidades de medidas e transformações, na tabela 1 no final deste volume.

2º exemplo: A ideia de se plantar em fileiras e com determinadas distâncias entre plantas, surgiu da necessidade de racionalização das áreas e principalmente com o advento da mecanização agrícola. A **densidade do plantio** equivale ao número de plantas utilizadas em uma determinada área e seu valor depende dessas distâncias. Para calcular a quantidade de plantas em uma determinada área **retangular** usamos a fórmula:

Fonte: (MASCARENHAS, 2018)

$$D = \frac{Área\ plantada}{a.b}$$

Onde:
- a é a distância entre linhas;
- b é distância entre plantas;
- D é a densidade de plantio.

[3] Grandeza é tudo aquilo que pode ser medido ou quantificado. Exemplos: distância, velocidade, peso, quantidade de agricultores, etc.

Vamos determinar a densidade de um plantio cujo espaçamento entre linhas é de $2m$ e entre plantas de $5m$ (ver figura 1.3.1), numa área de 1 ha:

$$D = \frac{Área\ plantada}{a.b} = \frac{100m.100m}{2m.5m}$$

$$D = \boxed{1000\ plantas\ ha^{-1}}.$$

A densidade desse plantio é de 1000 plantas por hectare.

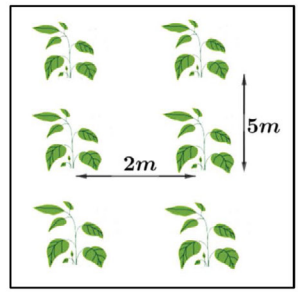


Figura 1.3.1

De forma inversa, é possível estimar a quantidade de plantas por hectare a partir de uma amostra do plantio. Para isso, basta verificar quantas plantas há em 1 metro quadrado do plantio e multiplicar por 10000.

Outra grandeza utilizada na agricultura é o **metro linear**. O metro linear é uma medida calculada pela razão entre área plantada e o espaçamento entre linhas.

$$ML = \frac{Área\ plantada}{b}$$

Onde: b é distância entre linhas; ML é o metro linear.

No exemplo anterior o metro linear do plantio é:

$$ML = \frac{Área\ plantada}{b} = \frac{100m.100m}{2m} = \boxed{5000\ metros\ lineares}.$$

Em outras palavras, pode-se dizer que nesse plantio (de dimensões retangulares) há 50 linhas de 100 metros, que hipoteticamente plantados em uma única fila, corresponde a 5000 metros lineares.

3º exemplo: Uma lavoura possui espaçamento entre linhas de 40 cm e 10 plantas por metro linear. Qual a estimativa de plantas por hectare dessa lavoura?

Solução: Supondo dimensões retangulares, são $\frac{100}{0,4} = 250$ fileiras, com $10.100 = 1000$ plantas cada uma. Assim, a lavoura possui: $250.1000 = 250.000\ plantas\ ha^{-1}$.

Outra solução: $\frac{100}{10} = 0,1m$ é o espaçamento entre plantas. Substituindo na fórmula da densidade, temos

$$D = \frac{Área\ plantada}{a.b} = \frac{100m.100m}{0,4m.0,1m} = \boxed{250.000\ plantas\ ha^{-1}}.$$

4º exemplo: Vazão pode ser definida como sendo a quantidade volumétrica de um fluido que escoa através de uma seção de uma tubulação ou canal por unidade de tempo. A fórmula de cálculo é dada pela razão entre o volume e o tempo. As unidades de medidas mais comuns são: m^3/s, m^3/h, l/h, l/min, entre outras.

Uma mangueira de irrigação tem vazão de 100 litros em 20 minutos.

a)Qual a vazão em litros por minutos?

Solução: $\frac{100}{20} = \boxed{5\ l/min}$.

b)Quanto seria essa vazão em l/h?

Solução: Como 1 hora tem 60 minutos: $5 \times 60 = \boxed{300\ l/h}$.

5º exemplo: 1/10 de uma plantação de cana-de-açúcar de 1 ha foi perdido por conta de pragas. Quantos m² foram perdidos?

Solução: $\frac{1}{10} \times 1\ ha = \frac{1}{10}.100m \times 100m = \boxed{1000m^2}$.

EXERCÍCIOS 1.5

1) Calcule a densidade de plantio de 1 ha de duas plantações cujos espaçamentos estão a seguir:

a)Distância entre linhas de 2m e entre plantas de 4m?

b)Distância entre linhas de 1m e entre plantas de 0,5m?

2) Quantos metros lineares possui uma lavoura cujo espaçamento entre linhas é de $2m$, em uma área de 1 ha?

3)Um plantio possui espaçamento entre linhas de 50 cm e 4 plantas por metro linear. Qual a estimativa de plantas por hectare desse plantio?

4)Uma mangueira de irrigação tem vazão de 300 litros em 15 minutos. Qual a vazão em litros por hora?

5)Para se determinar a capacidade de trabalho de uma máquina agrícola, basta verificar o número de hectares trabalhados (área) num determinado período de tempo, ou seja, basta calcular a razão entre a área e o tempo.

Fonte adaptada: (PACHECO, 2000)

Qual a capacidade de trabalho de uma semeadora-adubadora que plantou 6 ha em 5 horas?

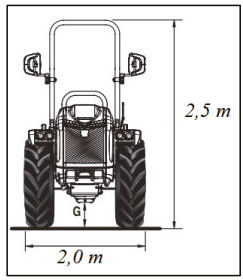
6)Um pulverizador costal manual possui capacidade de 20 litros. Um agricultor pulverizou uma área de plantio em 50 minutos, utilizando toda a capacidade do pulverizador. Qual a vazão do bico desse pulverizador em l/h?

7) De acordo com as especificações de largura e altura do trator na figura:

a)Qual a razão entre a largura e a altura?

b)Um trator menor está sendo projetado para uma altura de 2,0 metros. Qual deve ser a largura desse novo trator, se for preciso manter a mesma razão do

trator anterior?



8) "Os donos de veículo flex muitas vezes não sabem qual combustível escolher na hora de encher o tanque. O álcool rende menos, sendo assim, o veículo roda menos quilômetros por litro que a gasolina com o mesmo volume de combustível. Para saber qual combustível escolher, a conta é simples: Divida o preço do etanol pelo da gasolina. Caso o resultado seja inferior ou igual a 0,70, escolha o álcool; caso contrário a gasolina é a melhor opção. O litro do etanol ficou mais barato no final de junho, passou de R$ 1,93 para R$ 1,92. A gasolina também ficou e está mais em conta. O preço nacional médio é de R$ 2,73."

Fonte: (EXTRA, 2012)

De acordo com os preços do etanol e da gasolina presentes no texto acima, qual o combustível é mais vantajoso para o consumidor?

Texto para as questões 9 e 10: Calcular corretamente o custo de produção agrícola é essencial para o sucesso na gestão de qualquer propriedade rural. [...]. É claro que a produtividade está diretamente relacionada com a receita, mas nem sempre produzir 75 sacos de soja por hectare é melhor do que produzir apenas 55 sacos por hectare, isso depende dos custos da produção.

Fonte adaptada: (INSTITUTOAGRO, 2019)

9)Para um mesmo custo de produção, qual propriedade rural exemplificada a seguir, teve maior produtividade por hectare?

a) Propriedade A: colheu 1300 sacos de soja em 35 hectares;
b) Propriedade B: colheu 1750 sacos de soja em 45 hectares;
c) Propriedade C: colheu 3000 sacos de soja em 77 hectares;
d) Propriedade D: colheu 7550 sacos de soja em 198 hectares;
e) Propriedade E: colheu 35 sacos de soja em 1 hectare.

10)Supondo que a cada x sacos de soja colhidos por hectare, y são para pagar os custos da produção. Marque a melhor produtividade:

a) Propriedade A: $x = 75$ e $y = 55$;
b) Propriedade B: $x = 50$ e $y = 25$;
c) Propriedade C: $x = 80$ e $y = 45$;

d) Propriedade D: $x = 105$ e $y = 75$;

e) Propriedade E: $x = 45$ e $y = 5$.

11) O método convencional do plantio de soja consiste em um espaçamento entre fileiras de 45 a 50 centímetros, espaço entre plantas de 7 a 10 centímetros e uma semente por cova.

Fonte: (POPOV, 2017)

Respeitando as especificações do método, qual o número máximo de plantas que é possível plantar em um terreno retangular de 1 ha?

12)(ENADE-AGRONOMIA-2004) Uma cultura de feijão será implantada com espaçamento de 0,5 m entre sulcos de plantio e de 10 cm entre plantas dentro da linha de plantio. A população de plantas por hectare será:

a) 20.000;
b) 100.000;
c) 200.000;
d) 500.000;
e) 1.000.000.

13) Calcule:

a) $\frac{3}{5}$ de 20. b) $\frac{1}{8}$ de 1000. c) $\frac{7}{11}$ de 50.

14) Escreva os números abaixo em forma de fração:

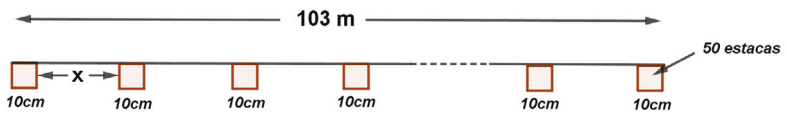
a) 0,8888... b) 2,131313... c) 10,00569569569...

15) Um terreno retangular 85mx125m será cercado por estacas (despreze suas dimensões), com uma estaca obrigatoriamente em cada canto do terreno (no vértice do retângulo).

a)Se a distância entre as estacas não pode exceder 3 metros, qual a menor quantidade de estacas que deve ser utilizada?

b)Se a distância entre as estacas deve ser igual em qualquer lado do terreno, qual o número mínimo de estacas a serem utilizadas? E qual deve ser a distância entre elas?

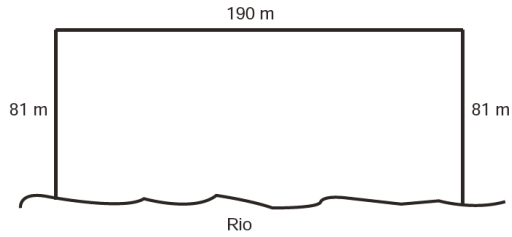
16)A lateral de um terreno que mede 103 metros, será cercada por 50 estacas com espessura de 10cm. Sabendo que as estacas terão a mesma distância uma da outra, qual deve ser o valor dessa distância (x)?



17)(ENEM) Para o reflorestamento de uma área, deve-se cercar totalmente, com tela, os lados de um terreno, exceto o lado margeado pelo rio, conforme a figura. Cada rolo de tela que será comprado para confecção da cerca contém 48 metros de comprimento.

A quantidade mínima de rolos que deve ser comprada para cercar esse terreno é

a) 6 b) 7 c) 8 d) 11 e) 12



18)(ENEM) O índice de eficiência utilizado por um produtor de leite para qualificar suas vacas é dado pelo produto do tempo de lactação (em dias) pela produção média diária de leite (em kg), dividido pelo intervalo entre partos (em meses). Para esse produtor, a vaca é qualificada como eficiente quando esse índice é, no mínimo, 281 quilogramas por mês, mantendo sempre as mesmas condições de manejo (alimentação, vacinação e outros). Na comparação de duas ou mais vacas, a mais eficiente é a que tem maior índice.

A tabela apresenta os dados coletados de cinco vacas:

Após a análise dos dados, o produtor avaliou que a vaca mais eficiente é a

a) Malhada
b) Mamona
c) Maravilha
d) Mateira
e) Mimosa

Dados relativos à produção das vacas

Vaca	Tempo de lactação (em dias)	Produção média diária de leite (em kg)	Intervalo entre partos (em meses)
Malhada	360	12,0	15
Mamona	310	11,0	12
Maravilha	260	14,0	12
Mateira	310	13,0	13
Mimosa	270	12,0	11

19)(ENEM) Uma pessoa possui um espaço retangular de lados 11,5 m e 14 m no quintal de sua casa e pretende fazer um pomar doméstico de maçãs. Ao pesquisar sobre o plantio dessa fruta, descobriu que as mudas de maçã devem ser plantadas em covas com uma única muda e com espaçamento mínimo de 3 metros entre elas e entre elas e as laterais do terreno. Ela sabe que conseguirá plantar um número maior de mudas em seu pomar se dispuser as covas em filas alinhadas paralelamente ao lado de maior extensão.

O número máximo de mudas que essa pessoa poderá plantar no espaço disponível é

a) 4. b) 8. c) 9. d) 12. e) 20.

1.4. Proporção

Proporção é uma igualdade entre duas razões:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Os valores de a e d são chamados de **extremos** e b e c de **meios**.

$$\underbrace{a \div \overbrace{b = c}^{\text{Meios}} \div d}_{\text{Extremos}}$$

Em toda proporção o produto dos meios é igual ao produto dos extremos (ou vice versa), também chamada de **multiplicação em cruz**.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \times d = b \times c$$

Quando essas razões representam medidas de algumas grandezas, dizemos que essas grandezas são proporcionais. Veja algumas aplicações a seguir.

1º exemplo: Uma praga afetou duas lavouras de cana de açúcar. O proprietário percebeu que na 1ª lavoura, a cada 28 canas colhidas, 5 estavam estragadas. E na 2ª lavoura, a cada 84 canas colhidas, 14 estavam estragadas. Proporcionalmente, qual lavoura teve maior prejuízo?

Solução: Calculando a razão na primeira lavoura: $\frac{28}{5} = 5{,}6$. Significa que a cada 5,6 canas, 1 (uma) estava estragada. Na segunda lavoura: $\frac{84}{14} = 6$. Significa que a cada 6 canas, 1 estava estragada. Dessa forma, a primeira lavoura teve maior prejuízo, pois colheu menos canas a cada 1 (uma) estragada.

Para a segunda lavoura ter o mesmo prejuízo da 1ª é preciso uma proporção

$$\frac{28}{5} = \frac{84}{x} \Rightarrow 28x = 5 \cdot 84 \Rightarrow 28x = 420 \Rightarrow x = \frac{420}{28} \Rightarrow \boxed{x = 15}.$$

A segunda lavoura deveria ter 15 canas estragadas para ter um mesmo prejuízo.

2º exemplo: Dois aspersores de um mesmo fabricante possuem as seguintes especificações:

Aspersor A: Vazões de 600 L/h (0,60 m³/h) a 5.000 L/h (5,00 m³/h);

Aspersor B: Vazões de 500 L/h (0,50 m³/h) a 4.500 L/h (4,50 m³/h).

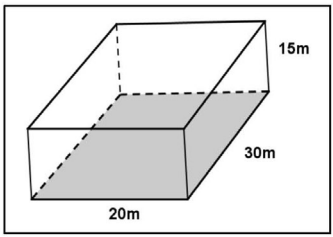
a)Em quanto tempo o aspersor A, em vazão máxima, esvaziará uma cisterna de 15000 litros? E se fossem os dois aspersores em vazões máximas?

Solução: Em $\frac{15000}{5000} = 3$ horas, o aspersor A esvaziará a cisterna.

Os dois aspersores em vazão máxima, esvaziariam a cisterna em $\frac{15000}{4500+5000} = \frac{15000}{9500} \cong 1{,}57$ horas.

Como 0,57 horas = 0,57.60 = 34,2 minutos e 0,2 minutos = 0,2.60 = 12 segundos. A resposta pode ser 1h: 34m: 12s.

b)O aspersor B foi instalado em um sistema de irrigação que possui um reservatório de dimensões em forma de paralelepípedo medindo 15mx20mx30m, conforme a figura. Em quanto tempo esse aspersor, em vazão máxima, esvaziará o reservatório?



Solução: O reservatório possui formato de paralelepípedo, portanto, o volume da água é dado por $15x20x30 = 9000\ m^3$. Como $1m^3$ equivale a 1000 litros, temos

$$\frac{9000.1000}{4500} = \boxed{2000\ horas.}$$

$$\frac{2000}{24} = 83{,}33\ \ldots\ dias \Rightarrow (0{,}33\ldots\ x\ 24 = 8) \Rightarrow 83\ dias\ e\ 8\ horas.$$

Na área de medidas, dizemos que escala é a razão entre as dimensões apresentadas no desenho e o objeto real por ele representado. Estas dimensões devem ser sempre tomadas na mesma unidade de medida.

$$E = \frac{MD}{MR}$$

Onde: E é a escala; MD é a medida do desenho; MR é a medida real.

Uma escala é comumente apresentada como uma razão de 1 para outro valor. Por exemplo, se um mapa apresenta a escala **1:2500**, significa que 1 cm no mapa é equivalente a 2500 cm no tamanho real, ou 1 m no desenho do mapa equivale a 2500 metros no tamanho real, assim sucessivamente. Caso em um mapa não mencionar a unidade de medida, deve-se considerá-la em centímetros.

Exemplo: Um mapa de um terreno rural foi desenhado na escala 1:500. Um agrônomo precisa demarcar no mapa uma área retangular medindo 30mx20m. Quais as dimensões dessa área no mapa?

Solução: Denominando de x e y as dimensões, temos

$$E = \frac{MD}{MR} = \frac{x}{30} \Rightarrow \frac{1}{500} = \frac{x}{30} \Rightarrow 500x = 30 \Rightarrow x = \frac{30}{500} \Rightarrow \boxed{x = 0{,}06m}.$$

$$\frac{1}{500} = \frac{y}{20} \Rightarrow 500y = 20 \Rightarrow y = \frac{20}{500} \Rightarrow \boxed{x = 0{,}04m}. \ Resposta: 6cm\ e\ 4cm.$$

2º exemplo: Em um mapa desenhado na escala de 1:1000 a distância entre duas cidades é de 8cm. Qual a distância entre as mesmas cidades em outro mapa menor desenhado na escala 1:1500?

Solução: Denominando de x e y as dimensões, temos

$$E = \frac{MD}{MR} \Rightarrow \frac{1}{1000} = \frac{8cm}{MR} \Rightarrow \boxed{MR = 8000\ cm\ ou\ 80\ m}.$$

$$E = \frac{MD}{MR} \Rightarrow \frac{1}{1500} = \frac{MD}{8000} \Rightarrow \boxed{MD = \frac{8000}{1500} \cong 5{,}34cm}$$ Aproximadamente 5,34 cm.

EXERCÍCIOS 1.6

1) Um aspersor de irrigação tem vazão de 100 litros de água em 15 minutos.

a)Qual a sua vazão em l/h?

b)Suponha que em uma determinada plantação (por questões técnicas) a vazão não pode exceder 1000 litros por dia. Quanto tempo, no máximo, esse aspersor deve ficar ligado ao dia?

c)Em quanto tempo esse aspersor esvaziará um reservatório em formato cúbico de 3m de lado?

2)A produção média de um laranjal é de 180 laranjas a cada três pés. Quantas laranjas em média serão colhidas em 150 pés?

3)Um caminhão tem capacidade para 5,5 toneladas de laranjas.

a) Quantas viagens, no mínimo, serão necessárias para transportar a produção 43 toneladas?

b) Suponha que para o transporte, as laranjas sejam acondicionadas em caixas com capacidade máxima de 30 kg. Quantas caixas, no mínimo, deverão ser usadas em uma única viagem?

4)O adubo NPK possui em 200kg, 8kg de nitrogênio, 60kg de fósforo e 32kg de potássio. Na mesma proporção, quantos quilogramas de cada nutriente (nitrogênio, fósforo e potássio) terá em 900kg desse adubo?

5) O confinamento é capaz de proporcionar segurança ao sistema de produção quando se deseja atingir determinados índices produtivos, tais como o controle da dieta, redução do tempo de abate e o monitoramento do desempenho dos animais. Tendo em vista os grupos genéticos avaliados e considerando o peso médio diário (GMD), notou-se que o grupo Aberdeen Angus, Nelore e composto Montana obtiveram 1,50 kg/dia, 1,33 kg/dia e 1,43 kg/dia, respectivamente, durante os 124 dias do confinamento.

Fonte: (FILHO, SILVA, *et al.*, 2017)

De acordo com o texto:

a) Qual grupo genético apresentou desempenho superior, medido pelo ganho em peso médio diário?

b) Quantos quilogramas, em média, ganhou cada grupo ao final dos 124 dias?

6)Resolva as equações:

a) $\frac{x}{3} = \frac{32}{6}$

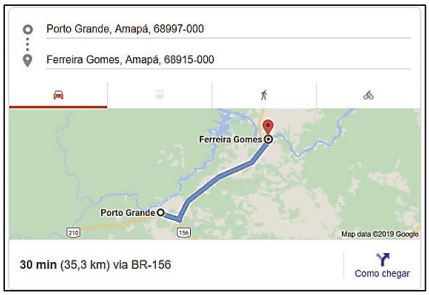
b) $\frac{12}{x} = \frac{48}{4}$

c) $\frac{x-3}{x} = \frac{4}{5}$

d) $\frac{9}{x+4} = \frac{5}{x}$

7)Quais as dimensões que deve ter uma área rural medindo 100mx100m em um mapa desenhado na escala de 1:400?

8)Consultando o mapa na internet para saber a distância entre Porto grande e Ferreira Gomes, no estado do Amapá. Um pesquisador consultou em uma mapa que essa distância é de 35,3 km. Sabendo que a distância destacada no desenho entre essas cidades é de 3,53 cm. Qual a escala do mapa?



Fonte: google.com/maps (acesso 03.04.2019)

9)Em um mapa desenhado na escala de 1:2000 a distância entre duas cidades é de 10cm. Qual a distância entre as mesmas cidades em outro mapa maior desenhado na escala 1:5000?

10)A distância entre as cidades de Macapá e Porto Grande no estado do Amapá é aproximadamente 100km. Qual a velocidade média de um motorista que leva 50 minutos para chegar de uma cidade a outra? Em quanto tempo ele faria o mesmo percurso se a velocidade média fosse de 130km/h?

11)Um agrônomo irá dividir R$ 500,00 entre 03 agricultores contratados, proporcionalmente a área plantada por cada um. Sabendo que o agricultor A plantou 35m² de área, o agricultor B, 40m² e o agricultor C plantou 25m². Quanto deve receber cada um?

12)Uma caixa com limões quando dividido igualmente entre os presentes, dava 8 limões para cada. Porém, ao chegar 2 pessoas, essa divisão passou a ser de apenas 6 limões para cada. Quantos limões havia na caixa?

13) Quantos peixes coloco num viveiro? Normalmente, se determina o número de alevinos adequado para se povoar um viveiro de acordo com o tipo de cultivo. O Cultivo semi-intensivo, por exemplo, é aquele em que o viveiro possui controle de abastecimento e drenagem, o produtor faz adubação e calagem, fornece alimento suplementar. Colocar 1 peixe por metro quadrado (m²), produz de 2.000 a 6.000Kg de peixe por ha/ano.

Fonte adaptada: (CEPLAC, 2018)

De acordo com o texto, qual a quantidade ideal de peixes para um viveiro retangular medindo 30mx20m?

14)Milho ganha novo espaçamento: O desenvolvimento de novos híbridos de milho, com plantas mais eretas e folhas menos expandidas, está tornando viável a redução do espaçamento, de 90 para 45 centímetros, entre as linhas de plantio, porém a distância entre as plantas é aumentada. Mesmo com a mesma quantidade de plantas por hectare, os testes mostraram que há incremento de 8% a 10% na produtividade, pois as plantas ficam mais arejadas e recebem mais luminosidade.

Fonte: (SOUZA, 2008)

Supondo que a distância entre plantas era de 80 cm quando o espaçamento entre as linhas de plantio era de 90 cm, qual deve ser a distância entre plantas, se o espaçamento entre linhas de plantio for reduzido para 45 cm, uma vez que a quantidade de plantas por hectare precisa ser a mesma?

15)(ENEM) O capim-elefante é uma designação genérica que reúne mais de 200 variedades de capim e se destaca porque tem produtividade de aproximadamente 40 toneladas de massa seca por hectare por ano, no mínimo, sendo, por exemplo, quatro vezes maior que a da madeira de eucalipto. Além disso, seu ciclo de produção é de seis meses, enquanto o primeiro corte da madeira de eucalipto é feito a partir do sexto ano.

Considere uma região R plantada com capim-elefante que mantém produtividade constante com o passar do tempo. Para se obter a mesma quantidade, em toneladas, de massa seca de eucalipto, após o primeiro ciclo de produção dessa planta, é necessário plantar uma área S que satisfaça à relação:

a) S= 4R. b) S = 6R. c)S = 12R. d) S= 36R. e) S = 48R.

16)(ENADE-AGRONOMIA-2019) Um produtor rural de soja aplicará um inseticida para controle de pragas cuja bula recomenda a dosagem de $2\ l.ha^{-1}$ (litro por hectare) do produto comercial. Ele possui um pulverizador com capacidade de 400 litros, devidamente regulado para distribuir esse volume em $4\ ha$. Considerando-se essas informações, qual quantidade do produto comercial deve ser adicionada ao tanque de pulverização utilizando o seu volume total?

a) 2 litros. b) 4 litros. c) 8 litros. d) 10 litros. e) 12 litros.

17)(ENEM) Um granjeiro detectou uma infecção bacteriológica em sua criação de 100 coelhos. A massa de cada coelho era de, aproximadamente, 4 kg. Um veterinário prescreveu a aplicação de um antibiótico, vendido em frascos contendo 16 mL, 25 mL, 100 mL, 400 mL ou 1 600 mL. A bula do antibiótico recomenda que, em aves e coelhos, seja administrada uma dose única de 0,25 mL para cada quilograma de massa do animal. Para que todos os coelhos recebessem a dosagem do antibiótico recomendada pela bula, de tal maneira que não sobrasse produto na embalagem, o criador deveria comprar um único frasco com a quantidade, em mililitros, igual a

a) 16. b) 25. c) 100. d) 400. e) 1 600.

CAPÍTULO

2

REGRA DE TRÊS E PORCENTAGEM

REGRA DE TRÊS E PORCENTAGEM

2. REGRA DE TRÊS E PORCENTAGEM

2.1. Grandezas diretamente e inversamente proporcionais

Na unidade anterior, vimos que quando duas razões entre duas grandezas são iguais, elas são denominadas de grandezas proporcionais. Nesta unidade, vamos estudar os casos em que essas grandezas podem ser diretamente ou inversamente proporcionais.

Como exemplo, vamos analisar as informações da porção de uma ração animal e seu valor energético (calorias), que estão no quadro a seguir.

Porção (g)	2	4	9
Valor energético (kcal)	6	12	27

Observe que a razão (o quociente) entre os números em qualquer coluna são iguais: $\frac{2}{6} = \frac{4}{12} = \frac{9}{27}$, todos tem como resultado $\frac{1}{3}$. De um modo geral, quando a razão entre duas grandezas apresentam valores constantes (iguais), essas duas grandezas são **diretamente proporcionais.** E o valor $\frac{1}{3}$, desse exemplo, é denominado de constante de proporcionalidade.

Observe ainda que na medida em que a porção **aumenta**, **aumenta** também o valor energético na mesma proporção. Portanto, a porção e o valor energético são grandezas **diretamente** proporcionais.

Agora, veja as informações de duração (em dias) de 100kg dessa mesma ração de acordo com o número de animais.

Quantidade de animais	4	8	12
Tempo (dias)	6	3	2

Perceba que multiplicando os números de cada coluna o resultado é sempre 24. E via de regra, quando o produto de duas grandezas apresentam valores constantes (iguais), essas duas grandezas são **inversamente proporcionais.**

Veja também, que na medida em que a quantidade de animais **aumenta**, o tempo **diminui** na mesma proporção. Dessa forma, dizemos que a quantidade de animais e o tempo são grandezas **inversamente** proporcionais.

Como as grandezas envolvidas em problemas matemáticos são normalmente conhecidas do nosso cotidiano, é possível saber se elas são diretamente ou inversamente proporcionais (sem a tabela completa). Para isso, basta verificar o que acontece com uma grandeza, quando hipoteticamente (ou de acordo com os dados), aumentamos (ou diminuímos) a outra.

Se hipoteticamente **aumentamos** uma grandeza, e após a análise, percebemos que a outra grandeza também deve **aumentar**, teremos duas grandezas diretamente proporcionais. Porém, ao perceber que a outra grandeza deve **diminuir**, nesse caso, serão grandezas inversamente proporcionais. De forma contrária, é possível também supor que uma grandeza esteja diminuindo e se a outra também diminuir, são grandezas diretamente proporcionais, caso contrário (aumentar), inversamente proporcionais.

1º exemplo: Oito agricultores colhem toda a produção de uma fazenda em 12 dias. Quantos dias seriam necessários para colher a mesma produção, se a quantidade fosse de apenas três agricultores (na mesma proporção)?

Solução: As grandezas envolvidas são: quantidade de agricultores e tempo (em dias). Se aumentarmos a quantidade de agricultores a produção será colhida em menos tempo. Assim, são grandezas inversamente proporcionais e os produtos entre as grandezas são iguais. Denominando de x a quantidade de dias necessários, temos

$$8.12 = x.3 \Rightarrow 96 = 3x \Rightarrow x = \frac{96}{3} \Rightarrow \boxed{x = 32}.$$ Resposta: 32 dias.

2º exemplo: João e Antônio não sabem quanto está a cotação de preço da arroba do algodão. Ao vender o algodão para uma cooperativa, João recebeu R$ 78,00 por 15kg. Quanto Antônio deverá receber pelo seu algodão que pesa 20kg?

Solução: As grandezas envolvidas são preço e peso. É claro que quanto maior for o peso, maior será o preço a se receber. Desse modo, são grandezas diretamente proporcionais e as divisões entre as grandezas devem ser iguais. Denominando de x o preço pretendido, encontramos

$$\frac{78}{x} = \frac{15}{20} \Rightarrow 15x = 78.20 \Rightarrow 15x = 1560 \Rightarrow x = \frac{1560}{15} \Rightarrow \boxed{x = 104}.$$

Resposta: R$104,00.

3º exemplo: Um suinocultor fez alguns cálculos e concluiu que a ração disponível daria para alimentar seus 28 porcos por 48 dias. Após 12 dias ele comprou mais 14 porcos. Quantos dias durarão a ração após a compra?

Solução: As grandezas quantidade de porcos e tempo são inversamente proporcionais. Após 12 dias, a ração será suficiente para alimentar os 28 porcos em 36 dias. No entanto, é preciso saber quantos dias serão suficientes para alimentar os 42 porcos (28+14), uma vez, que adquiriu mais 14. Nesse contexto,

$$28.36 = 42.x \Rightarrow 1008 = 42x \Rightarrow x = \frac{1008}{42} \Rightarrow \boxed{x = 24}$$ Resposta: 24 dias.

2.2. Regra de Três

Nessa seção, vamos ver um dispositivo prático, denominado regra de três. Essa regra nos ajuda não só a resolver problemas com duas grandezas, como na seção anterior (aqui denominada de regra de três simples), como também problemas que envolvam mais de duas grandezas diretamente e/ou inversamente proporcionais, denominada de regra de três composta.

2.2.1. Regra de três simples

A **regra de três simples** consiste em:

1º PASSO: Colocar em colunas (um dado embaixo do outro) as informações sobre uma mesma grandeza, utilizando uma incógnita (uma letra) no lugar da informação que está sendo solicitada (ou que falta).

1º exemplo (já resolvido anteriormente): Oito agricultores colhem toda a produção de uma fazenda em 12 dias. Quantos dias seriam necessários para colher a mesma produção, se a quantidade fosse de apenas três agricultores (na mesma proporção)?

Solução:

Quant. agric.		Tempo(dias)	
8	→	12	(Lê-se: 8 agricultores está para 12 dias)
3	→	x	(Lê-se: 3 agricultores está para x)

2º PASSO: Escrever a coluna onde está o x em forma de fração: $\frac{12}{x} =$

3º PASSO: Verificar se as grandezas envolvidas são diretamente ou inversamente proporcionais. Se caso as grandezas forem diretamente proporcionais, mantém-se as frações exatamente como estão, caso forem inversamente proporcionais, inverte-se a fração que não contém a incógnita.

Analisando os dados vemos que: "quanto mais agricultores, menos dias serão necessários para colher a produção". Desse modo, são grandezas inversamente proporcionais. Assim, invertemos a fração que não contém a incógnita.

Atenção!!!É errado pensar: "...quantos mais agricultores mais rápido colhe-se a produção..." A expressão "mais rápido" refere-se a grandeza velocidade e não ao tempo.

$$\frac{12}{x} = \frac{3}{8} \Rightarrow 3x = 12.8 \Rightarrow 3x = 96 \Rightarrow x = \frac{96}{3} \Rightarrow \boxed{x = 32\ dias}.$$

2º exemplo (já resolvido anteriormente): João e Antônio não sabem quanto está a cotação de preço da arroba do algodão. Ao vender o algodão para uma cooperativa, João recebeu R$ 78,00 por 15kg. Quanto Antônio deverá receber pelo seu algodão que pesa 20kg?

Solução: Vamos dispor em colunas as informações, cada coluna com a sua

respectiva grandeza (1º passo).

Preço (R$)		Peso(kg)	
78	⟶	15	(Lê-se: 78 está para 15)
x	⟶	20	(Lê-se: x está para 20)

2º passo: Pondo a coluna onde está o x em forma de fração: $\frac{78}{x}$ =

3º passo: Analisando as grandezas envolvidas vemos que: "Quanto mais pesado for o produto maior o preço a se receber". Portanto, são grandezas diretamente proporcionais e a fração fica como está.

$$\frac{78}{x} = \frac{15}{20} \Rightarrow 15x = 78.20 \Rightarrow 15x = 1560 \Rightarrow x = \frac{1560}{15} \Rightarrow \boxed{x = R\$\ 104{,}00}.$$

3º exemplo (já resolvido anteriormente): Um suinocultor fez alguns cálculos e concluiu que a ração disponível daria para alimentar seus 28 porcos por 48 dias. Após 12 dias ele comprou mais 14 porcos. Quantos dias durarão a ração?

Solução: A ração será suficiente para alimentar os 28 porcos em 36 dias (48-12). O que precisamos saber é quantos dias serão suficientes para alimentar os 42 porcos (28+14), uma vez que, adquiriu mais 14.

Quant. porcos		Tempo	
28	⟶	36	(Lê-se: 28 está para 36)
42	⟶	x	(Lê-se: 42 está para x)

As grandezas quantidade de porcos e tempo, são inversamente proporcionais. Nesse contexto, devemos inverter a fração $\frac{28}{42}$.

$$\frac{36}{x} = \frac{42}{28} \Rightarrow 42x = 36.28 \Rightarrow 42x = 1008 \Rightarrow x = \frac{1008}{42} \Rightarrow \boxed{x = 24\ dias}.$$

4º exemplo: Uma torneira despeja 6 litros de água em 2 min. Sabendo que em 2 horas, ela encheu um tanque. Qual a capacidade deste tanque?

Solução: Observe inicialmente que o tempo não está na mesma unidade de medida, uma informação está em minutos e outra em horas (fique atento!). Como duas horas equivale a 120 minutos, temos:

Capacidade (litros)		Tempo (min)	
6	⟶	2	(Lê-se: 6 litros estão para 2 minutos)
x	⟶	120	(Lê-se: x horas está para 120 minutos)

Antes de montar as frações, vamos analisar as grandezas: "Quanto maior o recipiente, maior será tempo necessário para enchê-lo". Logo, são grandezas diretamente proporcionais.

$$\frac{6}{x} = \frac{2}{120} \Rightarrow 2x = 6.120 \Rightarrow 2x = 720 \Rightarrow x = \frac{720}{2} \Rightarrow \boxed{x = 360}.$$

Resposta: 360 litros.

EXERCÍCIOS 2.1

1)Averigue se as grandezas x e y a seguir, são diretamente ou inversamente proporcionais.

a)

x	-1	6	12
y	-48	8	4

b)

x	-12	20	100
y	-48	80	400

2) Três aspersores molham uma área de plantio de 5m². Quantos aspersores serão necessários para um terreno retangular que mede 30mx15m?

3)Um veículo percorreu 25km com utilizando 2 litros de combustível. Se a capacidade do seu tanque de combustível é de 45 litros, quantos quilômetros esse veículo irá percorrer com o tanque cheio?

4)Uma empresa A vende a saca de 50kg do arroz ao preço de R$ 35,00 e uma empresa B vende a saca de 60kg desse mesmo produto, a R$ 43,00. Qual a empresa vendo o produto mais barato?

5)A produção diária de uma fazenda era de 36 sacos de milho por tarefa quando todos os agricultores contratados estão trabalhando. Por questões financeiras, foi necessária a redução de 1/3 desses agricultores. De quanto passou a ser a produção diária?

6)Uma cisterna é ligada a 8 mangueiras de irrigação de mesma vazão, escoando toda a água em 3 horas. Quantas mangueiras de mesma vazão que a anterior deverão ser instaladas, para que toda a água dessa cisterna seja escoada em 2 horas?

7)Agricultores familiares de Poço das Trincheiras, no Sertão de Alagoas, ultrapassaram a produtividade de milho obtida na região em 2010, quando um grupo de 16 produtores participou de um Concurso de Produtividade e o vencedor atingiu a meta de 36 sacos de milho por tarefa.

Fonte: (SEAGRI, 2011)

a) Quantos sacos de milho foram colhidos em 5 tarefas por esse vencedor?

b) Supondo que uma tarefa equivale a uma área de 60mx60m, quantos metros quadrados em média foram necessários para esse vencedor encher 1 saco de milho?

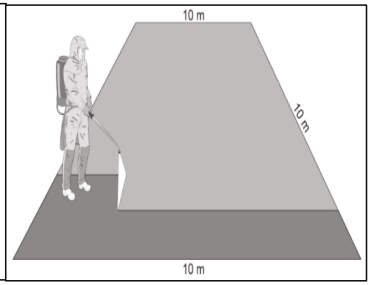
8) Toda vez que se pretende realizar um tratamento fitossanitário com a utilização de produtos químicos é necessário adotar técnicas que asseguram bons resultados agronômicos. A calibração do equipamento é determinante no sucesso da aplicação. Para calibrar um pulverizador costal manual, siga os passos:

I- Demarque uma área 10mx10m (100m²).

II- Coloque uma quantidade de água marcando o nível.

III- Pulverize a área a uma velocidade confortável e que seja sustentável nas condições normais da área que será pulverizada, mantendo pressão de bombeamento constante.

IV- Reabasteça sempre com água até a marca anterior e quantas vezes forem necessárias, até a pulverização total da área de 100m². Verifique o volume de água necessário.



Fonte e imagem: (AGROREPORTER, 2018)

Usando um pulverizador de 20 litros, um agricultor verificou que a água necessária para pulverizar 100m² foi 3 litros.

a) Qual o volume de água necessário para pulverizar 1 ha?

b) Quantas vezes é preciso abastecer um pulverizador de 20 litros para pulverizar 1 ha?

c) A dosagem recomendada de um produto químico é de 2 litros por hectare. Qual a dosagem a ser utilizada desse produto em cada reabastecimento do pulverizador?

9)(ENEM)Para contratar três máquinas que farão o reparo devias rurais de um município, a prefeitura elaborou um edital que, entre outras cláusulas, previa:

• Cada empresa interessada só pode cadastrar uma única máquina para concorrer ao edital;

• O total de recursos destinados para contratar o conjunto das três máquinas é de R$ 31 000,00;

• O valor a ser pago a cada empresa será inversamente proporcional à idade de uso da máquina cadastrada pela empresa para o presente edital.

As três empresas vencedoras do edital cadastraram máquinas com 2, 3 e 5 anos de idade de uso.

Quanto receberá a empresa que cadastrou a máquina com maior idade de uso?

a) R$ 3.100,00
b) R$ 6.000,00
c) R$ 6.200,00
d) R$ 15.000,00
e) R$ 15.500,00

2.2.2. Regra de três composta

É a regra cujos passos são similares à regra de três simples, onde invertemos as frações correspondentes às grandezas inversamente proporcionais e mantemos (sem inverter) as frações correspondentes às grandezas diretamente proporcionais. Porém, essa regra é aplicada em problemas com mais de duas grandezas.

Nesse contexto, como a análise da proporcionalidade é feita somente entre duas grandezas, é preciso fixar as demais, supondo que elas não variam (ou supondo que não podem variar). E além disso, é preciso analisar sempre a grandeza escolhida com a grandeza que pretende-se calcular (onde está o x), e jamais analisar duas grandezas entre si, se uma delas não for a pretendida (onde está o x). Por exemplo, se uma determinada questão tem três grandezas: distância, velocidade e tempo. Se a pergunta for sobre o tempo (onde está o x), então deve-se analisar a proporcionalidade da distância com o tempo, depois velocidade com o tempo, e jamais distância com velocidade.

Para demais detalhes, acompanhe os exemplos.

1º exemplo (clássico): Se 3 gatos pegam 3 ratos em 3 minutos, então quanto tempo é necessário para que 1 gato pegue 1 rato?

Solução: No primeiro momento podemos errar ao pensar que é 1 minuto. Vamos aos cálculos seguindo os passos.

1º passo: Iniciamos sempre fazendo o esquema abaixo, similar a regra de três simples.

Gatos		Ratos		Tempo (min)
3	→	3	→	3
1	→	1	→	x

2º passo: Iniciar pela fração onde está o x (essa nunca deve ser invertida) acompanhada do símbolo de igual:

$$\frac{3}{x} =$$

3º passo: Analisar a proporcionalidade entre as grandezas.

Supondo que a quantidade de ratos não varia, ao aumentarmos a quantidade de gatos, diminui-se o tempo de captura. Portanto, são grandezas inversamente proporcionais e inverte-se a fração.

$$\frac{3}{x} = \frac{1}{3}.$$

A fração referente à quantidade gatos foi invertida.

Supondo agora que a quantidade de gatos não varia (suponha a mesma quantidade). Ao aumentarmos o número de ratos, aumenta-se o tempo de captura. Dessa maneira, são grandezas diretamente proporcionais e mantém-se a fração da forma como está.

$\frac{3}{x} = \frac{1}{3}.\frac{3}{1}$ A fração referente a quantidade de ratos foi mantida.

Pode-se analisar as grandezas em qualquer ordem. Poderíamos ter analisado a quantidade de ratos primeiro e em seguida a de gatos. O resultado seria o mesmo.

4º passo: Resolver a equação.

$\frac{3}{x} = \frac{3}{3} \Rightarrow \frac{3}{x} = 1 \Rightarrow \boxed{x = 3}$ Resposta: 3 minutos.

2º exemplo: Cinco torneiras enchem um tanque de 4 mil litros em 1 dia. Fechando duas torneiras, quanto tempo é necessário para encher o tanque pela metade?

Solução: Fechando duas torneiras ficam apenas 3 funcionando. Se a capacidade do tanque é de 4mil litros, então para enchê-lo pela metade é necessário 2 mil litros.

Torneiras		Litros (mil)		Dias
5	→	4	→	1
3	→	2	→	x

Antes de montar as frações, vamos analisar as grandezas.

Supondo que a capacidade (litros) não varie, ao aumentarmos a quantidade de torneiras, o número de dias para encher o tanque deve diminuir. Portanto, "torneiras e dias" são inversamente proporcionais.

Conjecturando agora que a quantidade de torneiras não varie, ao aumentarmos o volume (a capacidade) do tanque, será necessário um número maior de dias para enchê-lo. Nesse interim, "litros e dias" são diretamente proporcionais. Segue a equação

$\frac{1}{x} = \frac{3}{5}.\frac{4}{2} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{12}{10} \Rightarrow 12x = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{11} \Rightarrow \boxed{x = \frac{5}{6}}$.

Mas, quanto é $\frac{5}{6}$ dias, em horas?

DIA		HORAS
1 dia	→	24 horas
5/6	→	x

$x = \frac{5}{6}.24$

$\boxed{x = 20}$ Resposta: 20 horas.

3º exemplo: 12 agricultores, trabalhando 4 horas por dia, colhem 120 sacos de laranjas em 10 dias. Quantos dias serão necessários para que 8 agricultores, trabalhando 8 horas por dia, consigam colher 80 sacos de laranjas?

Solução:

Agricultores		Horas p/ dia		Sacos		Dias
12	→	4	→	120	→	10
8	→	8	→	80	→	x

$\frac{10}{x} =$

Vamos analisar as grandezas quantidade de agricultores e dias. Supondo que as horas por dia de trabalho não variam e a quantidade de sacos que se pretende colher é a mesma, ao aumentarmos a quantidade de agricultores, o número de dias para colheita irá diminuir. O que implica em grandezas inversamente proporcionais e a fração fica invertida.

$$\frac{10}{x} = \frac{8}{12}.$$

Supondo agora que a quantidade de agricultores e sacos para colher não varia, ao aumentarmos o número de horas por dia de trabalho, número de dias para a colheita diminui. Portanto, são grandezas também inversamente proporcionais e a fração fica invertida.

$$\frac{10}{x} = \frac{8}{12}.\frac{8}{4}.$$

Por fim, supondo que a quantidade de agricultores e as horas por dia de trabalho não variam, ao aumentarmos a quantidade de sacos de laranjas para colher, deve-se aumentar a quantidade de dias. Isso posto, são grandezas diretamente proporcionais e a fração é mantida.

$$\frac{10}{x} = \frac{8}{12}.\frac{8}{4}.\frac{120}{80} \Rightarrow \frac{10}{x} = \frac{7680}{3840} \Rightarrow 7680x = 38400 \Rightarrow x = \frac{38400}{7680} \Rightarrow \boxed{x = 5\ dias}.$$

4º exemplo: Um fazendeiro possui ração suficiente para alimentar suas 16 vacas durante 62 dias. Após 14 dias, ele vende 4 vacas. Passados mais 15 dias, ele compra 9 vacas. Quantos dias, no total, durou sua reserva de ração?

Fonte: (LIMA, CARVALHO, *et al.*, 2006)

Solução: Vamos calcular inicialmente quantos quilos de ração as 16 vacas comeram nos 14 dias iniciais.

Quant. de vacas		Dias		Ração (kg)
16	→	62	→	r
16	→	14	→	x

$$\frac{r}{x} = \frac{16}{16}.$$

Analisando quantidade de dias e ração: "Como a quantidade de vacas é a mesma, ao aumentarmos a quantidade de ração, o tempo (em dias de duração) será maior (grandezas diretamente proporcionais)". Assim:

$$\frac{r}{x} = \frac{16}{16}.\frac{62}{14} \Rightarrow \frac{r}{x} = \frac{62}{14} \Rightarrow 62x = 14r \Rightarrow x = \frac{14r}{62} \Rightarrow \boxed{x = \frac{7r}{31}}$$

As 16 vacas comeram $\frac{7r}{31}$ de r quilos de ração inicial.

Como o fazendeiro vendeu 4 vacas, ficou então com 12 vacas, alimentando-as por 15 dias. Vamos calcular quanto de ração essas 12 vacas comeram.

Quant. de vacas		Dias		Ração (kg)
16	→	62	→	r
12	→	15	→	x

Analisando agora quantidade de vacas e a ração: "Supondo que os dias não variam, ao aumentarmos a quantidade de vacas, é preciso aumentar a quantidade de ração, para

que o tempo (dias) seja o mesmo". Isto é, são diretamente proporcionais. Como já analisamos que "dias" e "ração" são também diretamente proporcionais, dispomos de

$$\frac{r}{x}=\frac{16}{12}.\frac{62}{15} \Rightarrow \frac{r}{x}=\frac{992}{180} \Rightarrow \frac{r}{x}=\frac{248}{45} \Rightarrow \frac{r}{x}=\frac{248}{45} \Rightarrow \boxed{x=\frac{45r}{248}}$$

Observe que 16 vacas comeram $\frac{7r}{31}$ e 12 vacas $\frac{45r}{248}$, sobrou então:

$$r-\frac{7r}{31}-\frac{45r}{248}=\frac{7688r-248.7r-31.45r}{7688} \Rightarrow$$

$$\frac{7688r-248.7r-31.45r}{7688}=\boxed{\frac{4557r}{7688}}$$

Basta agora, calcular quanto tempo que $12+9=21$ vacas comerão a reserva $\frac{4557r}{7688}$ de ração.

Quant. de vacas		Dias		Ração (kg)
16	→	62	→	r
21	→	x	→	$\frac{4557r}{7688}$

Quanto maior a quantidade de vacas menos dias durará a ração, inverte-se as frações. Quanto maior a quantidade de ração mais dias durará, mantém-se as frações. Assim:

$$\frac{62}{x}=\frac{21}{16}.\frac{r}{\frac{4557r}{7688}} \Rightarrow \frac{62}{x}=\frac{21}{16}.\frac{7688}{4557} \Rightarrow$$

$$\frac{62}{x}=\frac{161448}{72912} \Rightarrow x=\frac{4520544}{161448} \Rightarrow \boxed{x=28\ dias}.$$

Portanto, o total de dias será a soma: $14+15+28=57$ dias.

Outra solução: Vamos trabalhar com o tempo que ainda resta da ração. Como o tempo (dias) e a quantidade de vacas são inversamente proporcionais, utilizaremos o coeficiente de proporcionalidade inversa em cada situação. Vejamos:

Após vender 4 vacas (ficando com 12), a quantidade passar a ser $\frac{3}{4}$ do que era antes, pois $\frac{3}{4}.16=12$. Sendo assim, o tempo durará $\frac{4}{3}$ (observe a inversão) do que era antes, ou seja, $\frac{4}{3}.48=64$ dias.

Passados 15 dias, a ração dá para alimentar as 12 vacas por, agora, $64-15=49$ dias, mas como adquiriu mais 9, ficando com 21, a proporção será $\frac{21}{12}$ da quantidade de vacas que era antes, uma vez que $\frac{21}{12}.12=21$. Dessa forma, os dias deverão ser multiplicados pela proporção inversa: $49.\frac{12}{21}=28$ dias.

Assim, o total de dias será a soma: $14+15+28=57$ dias.

EXERCÍCIOS 2.2

1) Se 15 agricultores plantam 2000 sementes em 8 dias, quantos agricultores serão necessários para plantar 5000 sementes em 10 dias?

2)Para pintar 20m de muro de 80cm de altura, foram gastas 5 latas de tinta. Quantas latas serão gastas para pintar 16m de muro de 60cm de altura?

3)Um bloco de concreto de 10m de comprimento, 2m de largura e 1 de altura, pesa 1 tonelada. Calcule quanto pesará um bloco do mesmo material se as dimensões forem: 5m de comprimento, 6m de largura e 0,5m de altura.

4)Cinco bois consomem 1000m² de capim-elefante em 8 dias. Quantos metros quadrados dessa capim serão necessários para 8 bois, durante 10 dias?

5)(PUCCAMP-SP) Operando 12 horas por dia, 20 máquinas produzem 6000 peças em 6 dias. Com 4 horas a menos de trabalho diário, 15 daquelas máquinas produzirão 4.000 peças em:

a) 8 dias b) 9 dias c) 9 dias e 6 horas. d) 8 dias e 12 horas.

6)(CEFET) Os desabamentos, em sua maioria, são causados por grande acúmulo de lixo nas encostas dos morros. Se 10 pessoas retiram 135 toneladas de lixo em 9 dias, quantas toneladas serão retiradas por 40 pessoas em 30 dias ?

a) 1500 toneladas
b) 1800 toneladas
c) 2000 toneladas
d) 2200 toneladas

7)Cinco colhedoras e 10 caminhões, escoam a produção de um plantio de soja de 40 hectares em 5 dias. Quantas colhedoras serão necessárias para escoar a produção de 80 hectares em 10 dias, com apenas 5 caminhões?

8)20 máquinas, 10 operários trabalhando 16 horas por dia, levam 6 dias para fabricar 2500 unidades de um produto. Quantas máquinas serão necessárias para fabricar 7500 unidades desse produto, se 5 operários trabalharem 20 horas por dia, durante 12 dias?

9)Em uma determinada empresa, 10 impressoras de mesma capacidade operacional são capazes de tirar 2200 cópias iguais em 6 horas diárias de funcionamento ininterrupto. A empresa precisou aumentar a capacidade para 4000 cópias, porém 4 impressoras apresentaram problemas de funcionamento e deixaram de operar. Para atingir a capacidade almejada, as impressoras que

restaram precisam trabalhar quantas horas diárias?

10)O consumo de 12 despolpadoras de açaí iguais, operando 5 horas por dia, durante 30 dias, é de 300 quilowatts. Utilizando apenas 9 dessas despolpadoras, durante 4 horas por dia, de quanto será o consumo no mesmo período de tempo?

11)Uma fazendeiro iniciou a colheita de 20 hectares de um plantio em sua propriedade. Por experiência, ele sabe que suas quatro máquinas agrícolas, trabalhando 6 horas por dia, irão terminar a colheita em 15 dias. Porém, quando ainda restavam 8 hectares, uma das máquinas apresentou problemas e parou de funcionar. Se o fazendeiro pretende concluir a colheita nos 6 dias que faltam, em quantas horas por dia, devem trabalhar as máquinas restantes?

12)Para um terreno de 4 hectares foram contratados 50 agricultores e 20 ajudantes para cultivar e plantar 2000 sementes em 10 dias. Quantos agricultores serão necessários para plantar e cultivar 1600 sementes em 2 hectares, se dispondo apenas de 10 ajudantes e 8 dias?

13)14 profissionais e 6 aprendizes, trabalhando em 20 máquinas (cada profissional ou aprendiz só trabalha em uma máquina), operando 8 horas por dia, produzem em média 5000 peças. Com a crise financeira, a empresa dispensou 4 profissionais e 2 aprendizes. Quantas horas por dia devem trabalhar esse novo quadro de funcionários para que a produção seja a mesma?

14)Um sistema de irrigação composto de uma cisterna de 500m³ de água, está ligada a 3 bombas independentes e 20 aspersores. Todo o sistema possui capacidade (água) suficiente para irrigar uma plantação por 2 duas horas. Por quanto tempo, um sistema composto de uma cisterna de 600m³ de água, ligada a 4 bombas independentes e 10 aspersores, irão irrigar essa mesma plantação?

15) O ciclo completo de desenvolvimento de abelhas africanizadas (Apis melífera) das crias de rainha, operária e zangão, são respectivamente: 15, 20 e 24 dias. Tempo que vai desde o início (denominada de alvéolo) até a fase final de seu desenvolvimento (denominado de pupa).

Fonte: (COUTO, 2006)

Um apicultor, para não perder tempo, sempre adquiri alvéolos de cada cria, que já conseguiram se desenvolver, para acompanhar o tempo de desenvolvimento das outras. Exemplo: Ao final de 15 dias, ele adquiri novos alvéolos de rainha, enquanto aguarda as outras se desenvolverem. Ao final de 20 dias, adquiri novos alvéolos de operária, enquanto aguarda as outras de desenvolverem, e assim, sucessivamente. Qual o menor tempo necessário para que esse apicultor tenha todas as crias desenvolvidas?

2.3. Porcentagem

Porcentagem (ou percentagem) é uma razão cujo denominador é 100. É representado pelo símbolo % (por cento) e é amplamente utilizado em nosso cotidiano. Há muitas informações (ou dados) que precisam deste símbolo, para se ter uma ideia quantitativa, qualitativa e comparativa dessas informações. Exemplos de sua aplicação incluem medir a inflação, o índice de crescimento da economia do país, a taxa de analfabetismo, entre outros. Daí a sua importância e aplicabilidade.

Toda porcentagem a ser calculada precisa de um referencial. Quando dizemos que um determinado produto aumentou seu preço em $x\%$, essa porcentagem refere-se ao valor do aumento em relação ao seu preço inicial. Quando o índice de natalidade infantil, por exemplo, aumenta ou diminui $y\%$ de um ano para o outro, essa porcentagem tem como referencial os dados do ano anterior. Desse modo, para calcular uma porcentagem, é necessário estabelecer um referencial, seja ele o valor inicial, o dado anterior ou o valor total, e então aplicar a fórmula matemática:

$$\% = \frac{Valor\ desejado\ (acrescímo\ ou\ decréscimo)}{Valor\ referencial\ (inicial)} \times \mathbf{100}.$$

Isso permite comparar e medir a variação de uma grandeza em relação a outra, permitindo uma análise mais precisa e completa.

Exemplo: Considere que em uma população de pés de limão, a cada 25 pés, 4 estão acometidos por algum tipo de praga.

Valor referencial: 25 (pés de limão analisados)

Valor desejado: 4 (pés com algum tipo de praga).

$$\frac{Valor\ desejado}{Valor\ referencial}.100 = \frac{4}{25}.100 = 0{,}16.100 = 16\%.$$

16% dessa população de pés de limão, estão acometidos por algum tipo de praga.

Outra solução: Montar uma regra de três simples atribuindo aos 25 pés de limão 100% e aos 4 pés acometidos como x:

Pés de limão		Porcentagem (%)
25	⟶	100
4	⟶	x

$$\frac{100}{x} = \frac{25}{4} \Rightarrow 25x = 400 \Rightarrow x = \frac{400}{25} \Rightarrow \boxed{x = 16\%}.$$

2º exemplo: Numa turma de 48 alunos, 30 são mulheres. Em relação ao total, qual a porcentagem de homens e mulheres?

Solução:

Valor referencial: 48 (total de alunos).

Valor desejado: 30 (quantidade de mulheres).

$$\frac{Valor\ desejado}{Valor\ referencial}.100 = \frac{30}{48}.100 = 0{,}625.100 = \boxed{62{,}5\%\ de\ mulheres}.$$

Como 62,5% são mulheres de um total de 100%, temos que

$$100 - 62{,}5\% = 37{,}5, \text{ ou seja, } 37{,}5\ \% \text{ são homens.}$$

Outra forma de calcular a porcentagem de homens, é ver que na turma são $48 - 30 = 18$ homens. Dessa forma

$$\frac{18}{48} = 0{,}375\ (x100) \Rightarrow \boxed{37{,}5\%\ são\ homens}.$$

Uma terceira forma de resolver é usar uma regra de três simples para encontrar o percentual de mulheres. Da seguinte maneira,

$$\begin{matrix} 48 & \longrightarrow & 100\% \\ 30 & \longrightarrow & x \end{matrix} \quad \Rightarrow x = \frac{30}{48} = 0{,}625x100 \Rightarrow \boxed{62{,}5\%\ de\ mulheres}.$$

E fazer o mesmo para encontrar a porcentagem de homens.

Vamos utilizar esse exemplo, para mostrar a importância de se estabelecer o referencial da porcentagem. Se são 62,5% de mulheres e 37,5% de homens, então são (62,5% − 37,5%) 25% a mais de mulheres do que de homens, em relação ao total (esse é o referencial). Agora, se são 12 mulheres a mais que homens, e comparando com a quantidade de homens (mudou-se o referencial), passaremos a ter

$$\frac{12}{18} = 0{,}666\ldots\ (\times 100) \Rightarrow \quad 66{,}67\ \%.$$

66,67 % a mais de mulheres, em relação a quantidade de homens.

3º exemplo: Para calcular a porcentagem sobre qualquer valor, utilizamos a multiplicação. Veja:

a) 30% de 700 $\Rightarrow \frac{30}{100}.700 = 210.$

b) 17,8% de 100 $\Rightarrow \frac{17{,}8}{100}.100 = 17{,}8.$

c) 50% de 20% de 100 $\Rightarrow$ 50% de $\underbrace{20\%\ de\ 100}_{\frac{20}{100}.100 = 20} = \underbrace{50\%\ de\ 20}_{\frac{50}{100}.20 = 10} = 10.$

Use a regra de três simples para resolver esses itens.

4º exemplo: Uma loja vendia um certo produto a R$ 60,00. O dono resolveu reajustar o preço com um aumento de 12%. Quanto passou a custar o produto?

Solução: Para saber o valor do aumento é preciso calcular primeiro 12% de R$ 60,00. Que é

$\frac{12}{100}$. 60 =7,2 (valor do aumento foi de R$ 7,20).

Assim, $60 + 7{,}2 = 67{,}2$ ⇒ Resposta: R$ 67,20.

Outra forma de calcular o aumento de uma porcentagem sobre um determinado valor inicial, é transformar a porcentagem em decimal, acrescentar 1 (já que 1 equivale a 100%), e multiplicar o resultado pelo valor inicial. Veja:

$12\% = 0{,}12 \Rightarrow 1+0{,}12 = 1{,}12$ (O número a ser multiplicado).

$60 \cdot 1{,}12 =$ R$ 67,20 (Resposta).

5º exemplo: Uma loja vendia um certo produto a R$ 54,00. O dono resolveu conceder um desconto de 20% para pagamento à vista. Quanto passou a custar o produto à vista?

Solução: Para saber o valor do desconto é preciso calcular primeiro 20% de R$ 54,00. Que neste caso é

$\frac{20}{100} \cdot 54 = 10{,}8$ (valor do desconto é de R$ 10,80).

Assim, $54 - 10{,}8 = 43{,}2 \Rightarrow$ Resposta: R$ 43,20.

Outra forma de calcular o desconto de uma porcentagem, sobre um determinado valor inicial, consiste em transformar a porcentagem em decimal, subtrair esse valor de 1 (já que 1 equivale a 100%) e multiplicar o resultado pelo valor inicial. Observe:

$20\% = 0{,}2 \Rightarrow 1 - 0{,}2 = 0{,}8$ (O número a ser multiplicado).

$54 \cdot 0{,}8 =$ R$ 43,20 (Resposta).

6º exemplo: Uma fazenda na safra anterior tinha uma produção média de 450 melancias. Com o aumento da área de plantio, essa produção passou para 540 melancias. Qual o percentual de aumento?

Solução: O valor do aumento foi de $540 - 450 = 90$. Como queremos o percentual do aumento em relação ao valor inicial, temos

$\frac{90}{450} = 0{,}2$ (x100) $\Rightarrow 20\%$. Resposta: O percentual de aumento foi de 20%.

Outra forma de resolver utilizando a regra de três simples é a seguinte,

$$\begin{matrix} 450 & \longrightarrow & 100\% \\ 90 & \longrightarrow & x \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad 450x = 9000 \Rightarrow x = \frac{9000}{450} = 20 \Rightarrow 20\%.$$

SAIBA MAIS!

Porcentagem *e* ***pontos percentuais*** *são parâmetros diferentes. Como exemplo, suponha que a taxa de juros de uma operação financeira sofreu um aumento de 10% para 11%. Houve neste caso, um aumento de 1 ponto percentual e não de 1%. Pois, quem empresta R$ 100,00, por exemplo, deixará de pagar juros a R$ 10,00 para pagar juros a R$ 11,00, um aumento de:*

$\frac{11-10}{10} = 0{,}1$ (x100) $\Rightarrow$ *10 % (e não 1%).*

7º exemplo: Devido a crise financeira, uma empresa de produtos agrícolas resolveu aumentar os preços de todos os seus produtos em 20%? Após alguns meses resolveu baixar todos os preços ao valor inicial. Para isso foi preciso aplicar um percentual de desconto de quantos por cento? 20%?

Solução: Vamos supor que o preço de um produto custava x. Após o aumento, o

novo preço passou a ser $x.\ (1 + 0{,}2) = 1{,}2\ x$ (novo preço). Para voltar ao preço antigo, devemos aplicar um desconto y, ou seja, $1{,}2x.\ (1 - y)$.

Como a intenção da empresa é voltar ao preço inicial x, temos

$$1{,}2\ x.\ (1 - y) = x \Rightarrow 1 - y = \frac{\cancel{x}}{1{,}2\ \cancel{x}}$$

$$1 - y = \frac{1}{1{,}2} \Rightarrow y = -\frac{1}{1{,}2} + 1 \Rightarrow$$

$$y = -0{,}8333\ldots + 1 = 0{,}1666\ldots \Rightarrow \boxed{y \cong 16{,}67\%}.$$

Outra forma de resolver problemas como esse, é atribuindo um valor hipotético para o valor inicial. Vamos atribuir um valor de R$ 100 para o preço inicial. Aumentando 20% de 100, temos 120. Agora vamos diminuir o preço com um percentual y de forma que o valor volte ao preço inicial (100). Da seguinte forma

$$120(1 - y) = 100 \Rightarrow 1 - y = \frac{100}{120} = 0{,}8333\ldots \Rightarrow y = 0{,}166\ldots \Rightarrow \boxed{y \cong 16{,}67\%}.$$

8º exemplo: Os adubos e fertilizantes devem fornecer os chamados macronutrientes, porque são necessários em maiores quantidades, e os micronutrientes, porque são necessários em menores quantidades. Os principais macronutrientes são: nitrogênio (N); fósforo (P) e potássio (K). O adubo mineral NPK 4-14-8, por exemplo, fornece 4% de nitrogênio, 14% de fósforo e 8% de potássio, enquanto que a formulação 4-30-16 possui 4% de nitrogênio, 30% de fósforo e 16% de potássio.

Fonte: (AMARO, 2019)

a)Quantos quilos de cada um dos principais macronutrientes há em 200kg de um adubo NPK, cuja formulação é 4-30-16?

Solução:

$\frac{4}{100}.\ 200 =$ 8kg de Nitrogênio;

$\frac{30}{100}.\ 200 =$ 60kg de Fósforo;

$\frac{16}{100}.\ 200 =$ 32kg de Potássio.

b)Uma fábrica tem a sua disposição 42kg de fósforo e os demais nutrientes à vontade. Quantos quilos de adubo NPK 4-14-8 são possíveis fabricar?

Solução:

$$\frac{14}{100}\ x = 42 \Rightarrow 14x = 4200 \Rightarrow x = \frac{4200}{14} \Rightarrow \boxed{x = 300kg}.$$

c)Quantos quilos de cada um dos principais macronutrientes é preciso adicionar ou retirar, em 80kg de um adubo NPK 10-15-15 para que ele se torne NPK 20-10-20?

Uma solução:

- 10% de 80kg é 8kg e 20% de 80kg é 16kg, logo é preciso adicionar 8kg

de Nitrogênio (N).

- 15% de 80kg é 12kg e 10% de 80kg é 8kg, logo é preciso retirar 4kg de Fósforo (P).
- 15% de 80kg é 12kg e 20% de 80kg é 16kg, logo é preciso adicionar 4kg de Potássio(K)

A solução está errada! O erro encontra-se no referencial da porcentagem. Porque 80kg de adubo NPK 10-15-15 possui 8kg de nitrogênio (veja os cálculos anteriores) e ao adicionar 8kg de nitrogênio, não só o peso do nitrogênio aumenta (8+8 = 16kg) como também o peso total do adubo (80 + 8 = 88kg), que é o referencial. Dessa forma, ao adicionar 8kg, a porcentagem de Nitrogênio no adubo passa a ser de

$$\frac{8+8}{80+8}=\frac{16}{88}=0{,}1818 \Rightarrow 18{,}18\% \ (e\ não\ 20\%).$$

O mesmo ocorre com o acréscimo ou decréscimo dos demais macronutrientes.

Solução correta: Denominaremos N, P e K, os pesos a serem adicionados ou retirados de nitrogênio, fósforo e potássio, respectivamente, do peso total: 80+N+P+K.

Como há inicialmente 8kg de nitrogênio e a nova reformulação é de 20%, temos

$$\frac{8+N}{80+N+P+K}=\frac{20}{100}\Rightarrow\frac{8+N}{80+N+P+K}=\frac{1}{5}\Rightarrow\boxed{80+N+P+K=40+5N}\ (1).$$

Como há inicialmente 12kg de fósforo e a nova reformulação é de 10%, temos

$$\frac{12+P}{80+N+P+K}=\frac{10}{100}\Rightarrow\frac{12+P}{80+N+P+K}=\frac{1}{10}\Rightarrow\boxed{80+N+P+K=120+10P}\ (2).$$

E com 12kg de potássio inicialmente e uma a nova reformulação de 20%, temos

$$\frac{12+K}{80+N+P+K}=\frac{20}{100}\Rightarrow\frac{12+K}{80+N+P+K}=\frac{1}{5}\Rightarrow\boxed{80+N+P+K=60+5K}\ (3).$$

Igualando (1) e (3), obtemos

$$40+5N=60+5K\Rightarrow\boxed{N=4+K}\ (4).$$

Igualando (2) e (3), obtemos

$$120+10P=60+5K\Rightarrow\boxed{P=\frac{K}{2}-6}(5).$$

Substituindo (4) e (5) em (3), encontramos

$$80+N+P+K=60+5K\Rightarrow 80+4+K+\frac{K}{2}-6+K=60+5K\Rightarrow\boxed{K=\frac{36}{5}}.$$

Substituindo o valor de K em (4) e (5), dispomos de

$$N=4+K\Rightarrow N=4+\frac{36}{5}\Rightarrow\boxed{N=\frac{56}{5}}\ \ e\ P=\frac{K}{2}-6\Rightarrow P=\frac{18}{5}-6\ \Rightarrow\boxed{P=\frac{-12}{5}}.$$

Resposta: Para que um adubo NPK 10-15-15 se torne NPK 20-10-20, é preciso adicionar $\frac{56}{5}$ kg de nitrogênio, adicionar $\frac{36}{5}$ kg de potássio e retirar $\frac{12}{5}$ kg de fósforo. E o novo peso do adubo, será: $80+N+P+K=80+\frac{56}{5}+\frac{36}{5}-\frac{12}{5}=96$ kg.

EXERCÍCIOS 2.3

1)Setor mais competitivo da economia nacional, o agronegócio representa hoje 20% do PIB. Sem ele, a balança comercial brasileira sofreria um baque: 41% das exportações vêm do campo, cuja expansão dependerá fortemente da produtividade nos próximos anos.

Fonte: (PRATES, 2014)

a)Qual o percentual das exportações que não vêm do campo?

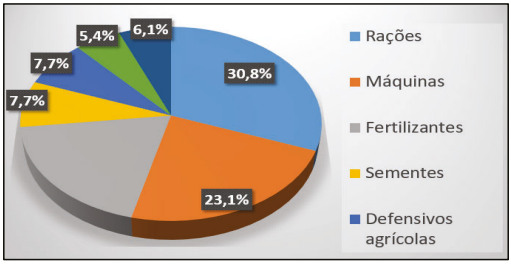
b)Em que valores, em reais, correspondem ao agronegócio, se o PIB brasileiro gira em torno de 7 trilhões de reais?

2)Os dados a seguir referem-se ao sistema de preparo no solo e suas técnicas de plantio no Brasil. Qual o percentual referente ao cultivo convencional?



3) O gráfico a seguir representa a estimativa média da composição percentual dos gastos na produção agrícola do Brasil, 2005/2006.

Qual o percentual referente aos fertilizantes?



Fonte adaptada: (MENDES e JUNIOR, 2007)

4)O preço da caixa de 20kg da banana prata que custava R$ 20,00, teve seu preço reajustado para R$ 22,00.

a)Qual o percentual do acréscimo?

b)Se a caso fosse necessário reajustar novamente ao preço inicial (retornar aos R$ 20,00), qual seria o percentual de desconto?

c)Suponha que ao invés de aumentar o preço, o dono resolvesse diminuir o peso da caixa para 18kg, porém mantendo o preço de R$ 20,00. Qual seria o percentual do aumento do preço?

5)Um fazendeiro fez duas propostas a seus funcionários:

1ª) Aumentar o preço da diária de 8 horas em 40%;

2ª) Reduzir o tempo da diária de 8 horas para 7 horas, porém mantendo o mesmo preço a ser pago.

Em relação ao preço da hora trabalhada, qual proposta é mais vantajosa para o funcionário?

6)Apenas 8% dos 1250 alunos de uma escola gostam de Matemática. Sabendo que apenas 99% dos alunos que gostam de matemática e 10% dos alunos que não gostam de Matemática, passaram num exame. Quantos alunos passaram e quantos alunos não passaram neste exame?

7) O Brasil deverá produzir 53,4 milhões de sacas de café em 2019, uma queda de 10,8% ante o recorde de 2018, projetou nesta quinta-feira o IBGE, à medida que o ciclo de produção tende a ser de baixa para o arábica, a variedade mais cultivada no país.

Fonte: (REUTERS, 2019)

a) Qual foi a produção de sacas de café no Brasil em 2018?

b) Supondo que em 2020 haverá uma nova queda de 9,2% em relação a 2019, o percentual de queda de 2020 em relação a 2018 será de 20% (10,8%+9,2%)? Justifique sua resposta.

8)A produção média de uma árvore era de 50 frutas por pé, quando sofreu um decréscimo de 20% e em seguida um aumento de 20%. Qual a produção atual?

9)Afetados por pragas, um certo cultivo de uma fruta teve 25% de perdas parciais, sendo que 4% dessas perdas tiveram seu frutos aproveitados. Qual o percentual de perda real?

10)Na safra e comercialização de abacaxis é possível ver muitas promoções. Marque a situação em que há um maior percentual de desconto no preço.

a) O preço unitário R$ 3,00 ou 4 unidades por R$ 10,00.
b) Na compra de 4 unidades de 1,5kg ganha um abacaxi pequeno de 1kg.
c) Leve 10 e pague 8.
d) A cada R$ 10,00 em compras, ganhe R$ 1,00 de desconto.

11)Um agricultor possui uma área de plantio retangular de x metros de comprimento por y metros de largura. Ele pretende ampliar essa área em 69%. Para isso é preciso:

a) Aumentar em 30% o comprimento e em 39% a largura.
b) Aumentar em 69% o comprimento e em 69% a largura.
c) Aumentar em 40% o comprimento e em 29% a largura.
d) Aumentar em 30% o comprimento e em 30% a largura.
e) Diminuir em 32% o comprimento e aumentar em 32% a largura.

12)O conceito de matéria seca (MS) é simplesmente: a massa do produto subtraída da massa de água. Todos os alimentos até os mais secos (como: fenos e cereais) possuem algum percentual de água em sua composição. Existem algumas metodologias-padrão para mensurar a matéria seca. Em laboratório, coloca-se o alimento em estufa à temperatura de 55º C por 72 horas. Em seguida, à 105º C, por 12 horas, retirando-se praticamente 100% da água presente na amostra. Há outros métodos de cálculo, porém, a equação é sempre a mesma, independentemente do método:

$$MS\% = \left(\frac{Massa\ inicial - Massa\ final}{Massa\ inicial}\right).100\%$$

Fonte: (BRITO, 2017)

a) Qual o percentual de MS de um alimento com massa inicial de 180 g e massa final de 100g?

b) A MS de um alimento estimado em laboratório foi de 45%, sabendo que a massa inicial do alimento foi de 400g, qual foi a massa final encontrada?

c) Em um teste de laboratório, um aluno erroneamente dividiu a massa final pela massa inicial de um alimento e multiplicou o resultado por 100%, encontrando 38%. Qual o percentual de matéria seca correta desse experimento?

13)Dentre todas as tecnologias e estratégias criadas para aumentar o desempenho dos animais, nenhuma é tão eficaz e importante quanto o consumo de matéria seca digestível. Um bezerro pesando 150kg em jejum, consome em torno de 2,7% do peso vivo em matéria seca por dia. Já um animal erado, com 500 kg em jejum, consome aproximadamente 2,25% do peso vivo em matéria seca por dia.

Fonte: (BRITO, 2017)

Calcule o consumo diário de matéria seca por dia do bezerro e de um erado, cujos pesos estão especificados no texto.

14) A densidade de semeadura da soja é um dos fatores primordiais para atingir altas produtividades e a rentabilidade desejada. A fórmula a seguir calcula a taxa de semeadura a partir do número de plantas e o poder germinativo das

sementes:

$$N = \frac{P \text{ x } 100}{G}$$

Onde: N é o número de sementes por metro, P o número de plantas por metro linear e G a poder de germinação das sementes (em %).

Fonte: (MENDES, 2019)

Considerando um número de 10 plantas por metro linear, calcule:

a) O número de sementes por metro que deve ser utilizado para um poder de germinação de 80%;

b) O poder de germinação (em percentual) das sementes utilizadas para que o número de sementes por metro seja igual a 14.

15) Entende-se por carcaça o bovino abatido, sangrado, esfolado, eviscerado, desprovido de cabeça, patas, rabada, glândula mamária (na fêmea), verga, exceto suas raízes, e testículos (no macho). O rendimento de carcaça é calculado dividindo-se o peso da carcaça pelo peso vivo do animal. Multiplicando-se o resultado dessa divisão por 100, teremos o rendimento expresso em porcentagem.

Fonte adaptada: (BEEFPOINT, 2002)

a) Qual o rendimento de carcaça de um boi vivo de 480 kg cuja carcaça pesa 260 kg?

b) Ao calcular o rendimento de uma carcaça um aluno erroneamente inverteu, dividiu o peso vivo do animal pelo peso da carcaça, encontrando o resultado 2,083333...Qual o valor correto do rendimento dessa carcaça?

c) Suponha que um animal tinha rendimento de carcaça de 53% e após uma alimentação adequada, teve seu peso vivo aumentado em 5% e o peso da carcaça em 10%. Qual o valor do novo rendimento de carcaça desse animal?

Texto para as questões 16, 17 e 18: Os ingredientes principais dos fertilizantes agrícolas são nitrogênio, fósforo e potássio (os dois últimos sob a forma dos óxidos P_2O_5 e K_2O, respectivamente). As percentagens das três substâncias estão geralmente presentes nos rótulos dos fertilizantes, sempre na ordem acima. Assim, um fertilizante que tem em seu rótulo a indicação 10−20−20 possui, em sua composição, 10% de nitrogênio, 20% de óxido de fósforo e 20% de óxido de potássio.

Fonte adaptada: ENADE-AGRONOMIA-2007

16) Misturando-se 50 kg de um fertilizante 10−20−10 com 50 kg de um fertilizante 20−10−10, obtém-se um fertilizante cuja composição é

a) 7,5-7,5-5.
b) 15-15-10.
c) 30-30-20.
d) 10-10-10.
e) 20-20-15.

17)Quantos quilos tem cada um dos ingredientes de um adubo NPK 04-30-16 em uma formulação de 300kg?

18)Uma empresa tem disponíveis à venda as seguintes formulações de adubo NPK em sacas de 50kg:

04-14-18	25-10-10
10-10-10	16-16-16
05-20-10	20-10-10
16-10-10	04-20-20

a) Um funcionário dessa empresa antes de colocar o adubo nas embalagens, misturou acidentalmente, 50kg do adubo NPK 16-10-10 com 40kg do adubo NPK 25-10-10. Qual a formulação NPK resultante dessa mistura?

b) Um agricultor precisa de um adubo NPK 10-15-15, para isso ele precisa comprar dessa empresa e misturar duas sacas de formulações diferentes. Quais são essas duas formulações e qual a melhor estratégia para encontrá-las?

c)Um cliente precisa de adubo NPK 8-12-24, cuja formulação não está disponível para a venda na tabela. Para atender esse cliente, um funcionário decidiu alterar os pesos de cada nutriente (NPK) da formulação 10-10-10 antes da mistura. Quantos quilos esse funcionário deve adicionar ou retirar de cada nutriente para que o cliente seja atendido?

19)Em meio a todo o esforço para manter a plantação saudável e produtiva, as pragas surgem como um pesadelo na rotina dos agricultores. Silenciosas no começo, chegam sem despertar suspeita, e quando o produtor nota a presença, muitas vezes, já se espalharam pela plantação. Um agricultor relatou que chegou a perder 30% da lavoura de 50 hectares de banana nanica e prata.

Fonte: (AGROPÓS, 2018)

a)Se esse agricultor, mesmo com as perdas de 30%, chegou a colher 2100kg de banana nanica e prata, quanto deveria ter colhido sem as perdas?

b)Pretendendo manter o faturamento bruto por hectare (suprir as perdas), que percentual esse agricultor deve elevar o preço de venda do fruto?

c)Numa amostra de cachos recolhidas, 70% dos cachos estavam bons e 12 apresentavam má formação. Quantos cachos havia nessa amostra?

d) Qual o único exemplo abaixo que retrata de forma similar e proporcional, o mesmo percentual de perda da lavoura por esse agricultor:

1º exemplo: A cada 5 cachos de banana colhidos, 2 cachos perdidos.

2º exemplo: A cada 10 cachos de banana colhidos, 3 cachos perdidos.

3º exemplo: A cada 50 cachos de banana colhidos, 20 cachos perdidos.

4º exemplo: A cada 5 hectares colhidos, 3 perdidos.

5º exemplo: A cada 10 hectares colhidos, 4 perdidos.

20)(ENEM) Um produtor de milho utiliza uma área de 160 hectares para as suas atividades agrícolas. Essa área é dividida em duas partes: uma de 40 hectares, com maior produtividade, e outra, de 120 hectares, com menor produtividade. A produtividade é dada pela razão entre a produção, em tonelada, e a área cultivada. Sabe-se que a área de 40 hectares tem produtividade igual a 2,5 vezes à da outra. Esse fazendeiro pretende aumentar sua produção total em 15%, aumentando o tamanho da sua propriedade. Para tanto, pretende comprar uma parte de uma fazenda vizinha, que possui a mesma produtividade da parte de 120 hectares de suas terras. Qual é a área mínima, em hectare, que o produtor precisará comprar?

a)36.
b)33.
c)27.
d)24.
e)21.

21)(ENADE-AGRONOMIA-2007) Para o cultivo de mamona em uma determinada região foi recomendada uma adubação de cobertura de 45 kg.ha^{-1} de N. Os fertilizantes disponíveis na região são apresentados na tabela abaixo.

Fertilizante	% de N	R$ / tonelada
Sulfato de amônio	20	500,00
Uréia	45	900,00
Nitrato de Amônio	33	900,00

Disponível em http://www.fnp.com.br (Adaptado)

Considerando a máxima economicidade no uso dos nutrientes (menor preço por kg de N) e sabendo que não há impedimento técnico para uso dos produtos relacionados, qual a quantidade e que tipo de fertilizante deve ser aplicado por hectare?

a)45 kg de uréia.
b)100 kg de uréia.
c)130 kg de sulfato de amônio.
d)136 kg de nitrato de amônio.
e)225 kg de sulfato de amônio.

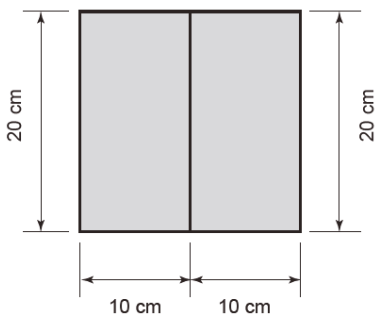
22)(ENEM) Um produtor de maracujá usa uma caixa-d'água, com volume V, para alimentar o sistema de irrigação de seu pomar. O sistema capta água através de um furo no fundo da caixa a uma vazão constante. Com a caixa-d'água cheia, o sistema foi acionado às 7 h da manhã de segunda-feira. Às 13 h do mesmo dia, verificou-se que já haviam sido usados 15% do volume da água existente na caixa. Um dispositivo eletrônico interrompe o funcionamento do sistema quando o volume restante na caixa é de 5% do volume total, para reabastecimento.

Supondo que o sistema funcione sem falhas, a que horas o dispositivo eletrônico interromperá o funcionamento?

a) Às 15 h de segunda-feira.
b) Às 11 h de terça-feira.
c) Às 14 h de terça-feira.
d) Às 4 h de quarta-feira.
e) Às 21 h de terça-feira.

23)(ENEM)Um agricultor vive da plantação de morangos que são vendidos para uma cooperativa. A cooperativa faz um contrato de compra e venda no qual o produtor informa a área plantada.

Para permitir o crescimento adequado das plantas, as mudas de morango são plantadas no centro de uma área retangular, de 10 cm por 20 cm, como mostra a figura. Atualmente, sua plantação de morangos ocupa área de 10.000m², mas a cooperativa quer que ele aumente sua produção. Para isso, o agricultor deverá aumentar a área plantada em 20%, mantendo o mesmo padrão de plantio.



O aumento (em unidade) no número de mudas de morango em sua plantação deve ser de

a) 10 000. b) 60 000. c) 100 000. d) 500 000. e) 600 000.

24)(ENEM) Um torrefador comprou uma saca de 60 kg de café especial cru (antes de torrar) por R$ 400,00. Devido à perda de umidade durante o processo de torrefação, são perdidos 10 kg de café por saca.

O torrefador irá vender o café torrado em embalagens de um quilograma e tem por objetivo obter um lucro de 200%, em relação ao valor pago, por unidade vendida.

Que preço de venda, por unidade, este torrefador deverá estabelecer para atingir o seu objetivo?

a) R$ 32,00 b) R$ 24,00 c) R$ 20,00 d) R$ 16,00 e) R$ 8,00

25)(ENEM) A baixa procura por carne bovina e o aumento de oferta de animais para abate fizeram com que o preço da arroba do boi apresentasse queda para o consumidor. No ano de 2012, o preço da arroba do boi caiu de R$ 100,00 para R$ 93,00.

Disponível em: www.diariodemarilia.com.br. Acesso em: 14 ago. 2012

Com o mesmo valor destinado à aquisição de carne, termos de perda ou ganho, o consumidor

a) ganhou 6,5% em poder aquisitivo de carne.
b) ganhou 7% em poder aquisitivo de carne.
c) ganhou 7,5% em poder aquisitivo de carne.
d) perdeu 7% em poder aquisitivo de carne.
e) perdeu 7,5% em poder aquisitivo de carne.

26)(ENEM) O Brasil é um país com uma vantagem econômica clara no terreno dos recursos naturais, dispondo de uma das maiores áreas com vocação agrícola do mundo. Especialistas calculam que, dos 853 milhões de hectares do país, as cidades, as reservas indígenas e as áreas de preservação, incluindo florestas e mananciais, cubram por volta de 470 milhões de hectares. Aproximadamente 280 milhões se destinam à agropecuária, 200 milhões para pastagens e 80 milhões para a agricultura, somadas as lavouras anuais e as perenes, como o café e a fruticultura.

FORTES, G. Recuperação de pastagens é alternativa para ampliar cultivos. **Folha de S. Paulo**, 30 out. 2011.

De acordo com os dados apresentados, o percentual correspondente à área utilizada para agricultura em relação à área do território brasileiro é mais próximo de

a) 32,8%. b) 28,6%. c) 10,7%. d) 9,4%. e) 8,0%

CAPÍTULO

3

PROGRESSÕES E JUROS

PROGRESSÕES E JUROS

3. PROGRESSÕES E JUROS

Nessa unidade estudaremos as sequências em forma de progressões aritméticas e geométricas. Essas progressões podem estar presentes em fenômenos periódicos, como safra e entressafra em produções agrícolas, eventos esportivos, aplicações de juros em empréstimos, etc. Além de servirem como base para estudos de caracterização de funções, como as funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica.

3.1. Progressão aritmética (P.A)

Definição 3.1.1: Denominamos de **sequência** ou **sucessão**, um conjunto de elementos dispostos em uma certa ordem ou padrão.

Exemplos:

- Nomes de pessoas em ordem alfabética: (Adilson, Augusto, Beatriz, Carlos,...);
- Anos em que foram realizadas as copas do mundo de futebol: (2002, 2006, 2010, 2014,...);
- As doses de um nutriente aplicados em um experimento de adubação: (0, 30, 60, 90, ...).

Cada elemento de uma sequência é chamado de termo, em que o primeiro termo é o a_1, o segundo termo a_2, o terceiro a_3 e assim por diante, o último termo ou o n-enésimo termo é o a_n.

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_n)$$

Uma sequência pode ser classificada em:

Finita: Representada pelas reticências entre o a_1 e o a_n ou sem as reticências:

- (4, 5, 6, ..., 99)
- (12, ..., 107, 110)
- (2, 4, 6, 8)

Infinita: Representada pelas reticências antes do a_1 e/ou depois do a_n:

- (4, 5, 6, 99...)
- (...12, 107, 110)
- (..., -1, 0, 1, 2, ...)

Definição 3.1.2: Denominamos de **progressão aritmética (P.A)**, uma sequência em que a diferença entre um termo (a partir do 2º) e o antecedente é sempre constante. E a essa constante denominamos de **razão (r)**.

$$r = a_{n+1} - a_n$$

A razão de uma P.A é a diferença do termo posterior pelo termo anterior.

Exemplos de P.A:

- (2, 4, 6, 8, ...) ⇒ r = 4 - 2 = 2 (todas as diferenças: 4-2, 6-4 e 8-6 são iguais).
- (100, 95, 90, ...) ⇒ r = 95 - 100 = -5 (todas as diferenças são iguais).
- (-13, -17, -21, ...) ⇒r = -17 - (-13) = -17 +13 = -4.
- (-49, -40, -31, ...) ⇒ r = -40 - (-49) = -40 +49 = 9.

Exemplos de sequências que não são progressões aritméticas:

- (7, 70, 700...), não é uma P.A, pois 70 - 7 ≠ 700 - 70. Para que seja P.A é preciso que todas as diferenças entre um termo e o anterior sejam iguais.
- (-2, -4, -8...), não é uma P.A, pois -4 - (-2) ≠ -8 –(-4).

3.1.1. Classificação das progressões aritméticas

Dizemos que uma P.A é:

• **Crescente**, quando o termo posterior a_{n+1} é maior que o anterior a_n. Isso acontece quando $r > 0$; (recíproca verdadeira).

• **Decrescente**, quando o termo posterior a_{n+1} é menor que o anterior a_n. Isso ocorre quando $r < 0$; (recíproca verdadeira).

• **Constante**, quando todos os termos são iguais. Isto é, quando $r = 0$. (recíproca também verdadeira).

Exemplos:

- (5, 9, 13, ...) ⇒ $r = 9 - 5 = 4$ (> 0, positivo) , então P.A crescente.

Veja que os termos crescem da esquerda para direita.

- (26, 23, 20, ...) ⇒ $r = 20 - 23 = -3$ (< 0, negativo), então P.A decrescente.

Perceba que os termos decrescem da esquerda para direita.

- (..., -7, -7, -7,...) ⇒ $r = -7 - (-7) = -7 + 7 = 0$, então P.A constante.

Observe que todos os termos são iguais.

Exemplo: Qual(is) da(s) sequência(s) a seguir é uma P.A?

a)(-6, -9, -12, -16)

b)(...-1, 10, -19, ...)
c)(5, 50, 500, ...)
d)(5, 10, 15, ...)
e)(5, 5, 5, 50, 5, 5, 5)

Solução:

- No item a, todos os decréscimos ocorrem de –3 em –3, com exceção de –16 – (–12) = –4. Portanto, não é uma P.A.

- No item b, do -1 ao 10 aumentou 11. Mas, diminuiu do 10 para o -19. Não é uma P.A.

- No item c, do 5 para o 50 aumentou 45 e do 50 para o 500 aumentou 450. Como não aumentou a uma mesma constante, não é uma P.A.

- A sequência do item d é uma P.A, pois todas as diferenças são iguais a 5.

- Por fim, no item e, há um aumento do 5 para o 50, não ocorrendo do 50 para o 5. Não é uma P.A.

3.1.2. Construção de progressões aritméticas

Para se construir uma P.A, é necessário e suficiente que tenhamos apenas duas informações: um termo qualquer da progressão e a sua razão. Para encontrar termos à esquerda de um elemento, subtraímos esse elemento pela razão, para encontrar termos à direita, somamos o elemento com a razão. Faz-se essa operação sucessivamente para construir a P.A.

Exemplo: Construção de uma P.A com um termo 4 e razão 2.

(..., 4 , ...) ⇒ 4 - 2 = 2 ⇒ (...2, 4,...) ⇒ 2-2 = 0 ⇒ (... 0, 2, 4, ...) ⇒ para encontrar os elementos à esquerda subtrai-se sucessivamente os elementos pela razão.

(..., 4 , ...) ⇒ 4 + 2 = 6 ⇒ (...4, 6,...) ⇒ 6+2 = 8 ⇒ (... 4, 6, 8,...) ⇒ para encontrar os elementos à direita soma-se sucessivamente os elementos com a razão.

A P.A é: (..., 0, 2, 4, 6, 8, ...). Crescente, pois a razão utilizada é 2 (> 0).

2º exemplo: Com um termo -7 e razão -3.

À esquerda de -7, temos: (...,-7 , ...) ⇒ -7 – (-3) = -4 ⇒
(...-4, -7,...) ⇒ -4 -(-3) = -1 ⇒ (... -1, -4, -7,...).

À direita de -7, encontramos: (..., -7 , ...) ⇒ -7 + (-3) = -10 ⇒ (...-7, -10, ...) ⇒ -10+(-3) = -13 ⇒ (... -7, -10 , -13,...).

A P.A é: (...,-1, -4, -7, -10, -13,...). Decrescente, pois a razão é -3 (< 0).

3º exemplo: Qual o número ausente na sequência, sabendo que é uma P.A?

a) (12, 33,__) ⇒ Resposta: 44.
b) (__,-13, -10) ⇒ Resposta: -16.
c) (12 ,____, 26) ⇒ Resposta: 19, pois 19 - 12 = 7 e 26 - 19 = 7.

EXERCÍCIOS 3.1

1)Classifique somente as sequências que são progressões aritméticas.

a) (...,-111, -112, -113...)
b) (...100, 50, 0,...)
c) (9,99,999,...)
d) (-1,-8,-15,...)
e) (112, 242, 372,...)
f) (7, 17, 27,...)
g) (20,20,20...)
h) $(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{9}{4}, \ldots)$
i) (-75, 0, 75, 100...)

2)Complete os espaços em com um elemento pertencente a P.A.

a) (___ , 0, 5)
b) (3, 8, ____)
c) (50, ____ ,100)
d) (-88, ___ , -88)
e) $(\frac{1}{2}, \_\_, \frac{3}{2})$

3)Construa uma P.A de 5 elementos em que:

a) $a_1 = 3$ e a razão $r = 5$;
b) $a_3 = 25$ e a razão $r = -5$;
c) $a_5 = -115$ e a razão $r = 15$;
d) $a_4 = -33$ e a razão $r = -13$.

3.1.3. Fórmula do termo geral de uma P.A

Pela definição 3.1.2, toda progressão aritmética pode ser escrita como: $(a_1, a_1 + r, a_1 + r + r, a_1 + r + r + r, \ldots) \Rightarrow (a_1, a_1 + r, a_1 + 2r, a_1 + 3r, \ldots)$, ou seja:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + r \\ a_3 &= a_1 + \underbrace{2}_{3-1} r \\ a_4 &= a_1 + \underbrace{3}_{4-1} r \\ &\vdots \\ a_n &= a_1 + (n-1).r \end{aligned}$$

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1).r}$$

Essa fórmula é comumente utilizada, pois na maioria das vezes temos o primeiro elemento (a_1). E se caso o primeiro elemento não for dado?

Se $a_n = a_1 + (n-1).r \Rightarrow \boxed{a_1 = a_n - (n-1).r}$ (1).

Se um termo qualquer a_x é diferente de a_1, então $a_x = a_1 + (x-1).r \Rightarrow \boxed{a_1 = a_x - (x-1).r}$ (2). Igualando (1) e (2), concluímos que:

$$\boxed{a_n = a_x + (n-x).r}$$

Esta é a fórmula geral usada para qualquer termo. Observe que $x = 1$ implica em $a_n = a_1 + (n-1).r$.

1º exemplo: Calcule o 8º termo da progressão aritmética (3, 7, 11,...).

Solução:

Primeira forma: Construindo a progressão artimética.

Sabendo que a razão é 7 - 3 = 4, temos

(3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31). Portanto, o a_8 é 31.

Segunda forma: Usando a fórmula do termo geral,

$$a_8 = a_x + (n - x).r \Rightarrow a_8 = a_1 + (8 - 1).r = 3 + 7.4 = 3 + 28 \Rightarrow \boxed{a_8 = 31}.$$

Agora, vamos calcular o a_{15} e o a_{20} da mesma sequência: (3,7,11,...).

$a_{15} = a_1 + 14.r$

$a_{15} = 3 + 14.4$

$a_{15} = 3 + 56$

$\boxed{a_{15} = 59}$.

$a_{20} = a_1 + 19.r$

$a_{20} = 3 + 19.4$

$a_{20} = 3 + 76$

$\boxed{a_{20} = 79}$.

2º exemplo: Quantos termos possui a P.A (2,4,6,8,...512)?

Solução:

Pela fórmula do termo geral, temos

- a_n é o último termo: 512.
- a_1 é o primeiro termo: 2
- r é a razão, neste caso, $r = 4 - 2 = 2$.
- n é a quantidade.

$a_n = a_1 + (n - 1).r$

$512 = 2 + (n - 1).2$

$512 - 2 = (n - 1).2$

$510 = (n - 1).2$

$\frac{510}{2} = n - 1$

$n - 1 = 255$

$n = 255 + 1$

$\boxed{n = 256}$.

3º exemplo: Calcule x, para que a seqüência $(x + 3, 2x - 7, x + 9)$ seja uma P.A.

Solução: Sabemos que para ser P.A, a diferença do segundo para o primeiro precisa ser igual a diferença do terceiro para o segundo (ou seja, a mesma razão). Assim,

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 \Rightarrow a_2 + a_2 = a_3 + a_1 \Rightarrow 2.a_2 = a_3 + a_1 \Rightarrow$$

$\boxed{a_2 = \frac{a_3 + a_1}{2}}$.

Em qualquer P.A, um termo é a média aritmética dos seus vizinhos, à esquerda e à direita.

$$a_2 = \frac{a_3 + a_1}{2} \Rightarrow 2x - 7 = \frac{x + 3 + x + 9}{2} \Rightarrow 4x - 14 = x + 3 + x + 9 \Rightarrow$$

$$4x - 14 = 2x + 12 \Rightarrow 4x - 2x = 12 + 14 \Rightarrow 2x = 26 \Rightarrow \boxed{x = 13}.$$

Ao substituir o valor de x, na sequência, encontramos a P.A (16, 19, 22) de razão 3.

É comum em situações que envolvem soma de termos de um P.A utilizarmos sua representação na forma:

Para 3 termos: $(x - r, x, x + r)$

Para 5 termos: $(x - 2r, x - r, x, x + r, x + 2r)$

A praticidade destas notações está na eliminação da razão r quando somamos todos os termos.

4º exemplo: A soma dos três primeiros termos de uma P.A é 27 e o quadrado do 3º termo é 121. Escreva a P.A

Solução:

Usando a notação anterior para 3 termos, encontramos

$$x - \cancel{r} + x + x + \cancel{r} = 27 \Rightarrow 3x = 27 \Rightarrow x = \frac{27}{3} \Rightarrow \boxed{x = 9}.$$

O 3º termo da notação $(x + r)$ ao quadrado é 121, desse modo: $(x + r)^2 = 121$.

Substituindo o valor de x, dispomos de

$$(9 + r)^2 = 121 \Rightarrow (9 + r) = \pm\sqrt{121} \Rightarrow 9 + r = \pm 11 \Rightarrow$$

$$r = \pm 11 - 9 \Rightarrow \begin{cases} r = +11 - 9 = 2. \\ r = -11 - 9 = -20. \end{cases}$$

Para $r = 2 \Rightarrow (9 - 2, 9, 9+2) = (7, 9, 11,\ldots)$.

Para $r = -20 \Rightarrow (9 - (-20), 9, 9+(-20)) = (29, 9, -11,\ldots)$.

5º exemplo: A soma dos cinco primeiros termos de uma P.A é 0 (zero) e a razão é 3. Escreva a P.A.

Solução:

Usando a notação anterior para 5 termos $(x - 2r, x - r, x, x + r, x + 2r)$:

$$x - \cancel{2r} + x - \cancel{r} + x + x + \cancel{r} + x + \cancel{2r} = 0 \Rightarrow 5x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

Como $r = 3$ e $x = 0$, encontramos

$(x - 2r, x - r, x, x + r, x + 2r) \Rightarrow (0 - 2.3, 0 - 3, 0, 0 + 3, 0 + 2.3)$.

Resposta: $(-6, -3, 0, 3, 6)$.

6º exemplo: Quantos números pares há entre o número 13 e o 131?

Solução: Os números pares entre 13 e 131 são (14, 16, 18,..., 128, 130), ou seja, uma P.A de razão 2. Usando a fórmula do termo geral e sabendo que $r = 2, a_1 = 14$ *e* $a_n = 130$, temos

$a_n = a_1 + (n - 1).r$

$130 = 14 + (n - 1).2$

$130 - 14 = (n - 1).2$

$130 - 14 = (n - 1).2$

$116 = (n - 1).2$

$$\frac{116}{2} = (n - 1)$$

$58 = n - 1$

$n - 1 = 58$

$\boxed{n = 59}$.

7º exemplo: Observe a sequência de figuras:

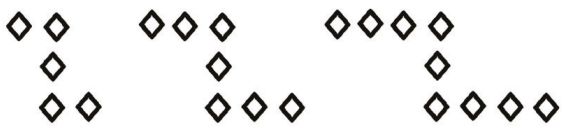


figura 1 figura 2 figura 3

a) Quantos losangos encontraremos na figura 23, mantido o mesmo padrão de construção?

Solução: A figura 1 tem 5 losangos, a figura 2 tem 7 losangos, a figura 3 tem 9, etc. (5, 7, 9,...) é uma P.A de razão 2 e o número da figura equivale a sua posição dentro da P.A. Assim,

$a_{23} = a_1 + (23-1).r = a_1 + 22.r = 5 + 22.2 = 5 + 44 = 49$ losangos.

b) Continuando a sequência encontraremos uma figura com 176 losangos?

Solução: Vamos calcular um termo qualquer a_n da P.A (5,7,9,...).

$$a_n = a_1 + (n-1).r = 5 + (n-1).2 = 5 + 2n - 2 \Rightarrow \boxed{a_n = 3 + 2n}.$$

Para $a_n = 176$, temos

$$176 = 3 + 2n \Rightarrow 2n = 176 - 3 \Rightarrow n = \frac{173}{2} \text{ (não é inteiro!)}$$

Outra solução será perceber que a sequência só possui números ímpares. Como 176 é par, não encontraremos uma figura com 176 losangos.

8º exemplo (interpolação aritmética): Interpolar 10 meios aritméticos entre 13 e 68.

Solução: Interpolar é inserir números em P.A entre os polos (extremos) de uma sequência.

Vamos inicialmente analisar a P.A, lembrando que para construir uma P.A é necessário saber sua razão: $(13, \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{10\ termos}, 68)$.

Se são 10 termos entre 13 e 68, então o 68 é o a_{12}. Pela fórmula do termo geral, encontramos:

$$a_{12} = a_1 + (n-1).r \Rightarrow 68 = 13 + 11.r \Rightarrow 68 - 13 = 11r \Rightarrow$$

$$55 = 11.r \Rightarrow r = \frac{55}{11} \Rightarrow \boxed{r = 5}.$$

Portanto, os meios são: (13, 18, 23, 28, 33, 38, 43, 48, 53, 58, 63, 68).

9º exemplo: Numa fila de 55 alunos, apenas 19 são mulheres. Um professor resolveu organizar a fila de forma que a quantidade de homens entre as mulheres seja a mesma. Sabendo que a fila começa e termina com uma mulher. De que forma essa fila pode ser organizada?

Solução: $(1º, \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{17\ mulheres}, 55º)$

$$a_{19} = a_1 + (19-1)r \Rightarrow 55 = a_1 + 18.r \Rightarrow r = \frac{54}{18} \Rightarrow \boxed{r = 3}.$$

$$(1º, \underbrace{4º, 7º, 10º, \ldots, 52º}_{17\ mulheres}, 55º)$$

Resposta: A cada 2 homens uma mulher.

EXERCÍCIOS 3.2

1)Calcule a razão e o 10º termo da progressão aritmética (1, 3, 5, ...).

2)Calcule a razão e o 9º termo da progressão aritmética (-4, -8, -12, ...).

3)Calcule a razão e o 20º termo da progressão aritmética (2, 4, 6,...).

4)Calcule a razão e o 100º termo da progressão aritmética (-50, -49 , -48,...).

5)Calcule x, para que a seqüência $(x-2,\ 3x-1,\ x+8)$ seja uma P.A.

6)Calcule x, para que a sequência $(2x-1,\ x^2, -x+2)$ seja uma P.A. Descreva a P.A.

7)A soma dos três primeiros termos de uma P.A é 15 e o primeiro termo é -2. Escreva a P.A.

8)A soma dos cinco primeiros termos de uma P.A é 50 e o quarto termo é 24. Escreva a P.A.

9) Quantos números ímpares há entre o número 44 e o 178?

10) O décimo termo de uma P.A é -50 e o décimo sexto é 88, calcule a razão dessa P.A.

11) Um aluno escreveu números naturais conforme o quadro. Qual o elemento que está na 10ª linha e na 7ª coluna desse quadro?

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
...	...	...	...	...	...	...	...

12)A Copa do Mundo FIFA de 2014 foi a vigésima edição ocorrida no Brasil. Esse torneio internacional de futebol masculino, ocorre a cada 4 anos e é organizado pela Federação Internacional de Futebol (FIFA). Em que ano ocorrerá a 30ª edição?

13) Os jogos olímpicos são eventos realizados de quatro em quatro anos. Sabendo que a 31ª edição desse evento ocorreu em 2016, em que ano ocorrerá a 50ª edição?

14) Sejam as sequências (2, 4, 6, ...) e (3, 6, 9, ...) com 20 termos cada. Quantos elementos em comum elas possuem?

15) Insira:

a) 05 meios aritméticos entre 30 e 168.
b) 14 meios aritméticos entre -15 e 15.
c) 19 meios aritméticos entre 0 e 2000.
d) 04 termos aritméticos entre -90 e 90.

16) Um cultivo consorciado de mamão e banana, precisa ser plantado de forma que, em uma fila, a quantidade de pés de bananeiras precisa ser a mesma entre cada pé de mamoeiro. Devido ao tamanho do terreno, é possível plantar ao todo 125 pés desses dois cultivos, em cada fila. Um agricultor pretende utilizar 32 mudas de mamoeiro em cada fila e mudas de bananeiras à vontade. Se cada fila, deve começar e terminar com um pé de mamoeiro, de que forma uma fila pode ser plantada?

17) Um agricultor pretender cercar um dos lados do seu terreno retangular com 50 estacas de madeira igualmente espaçadas. Se o lado pretendido possui 147 metros e é preciso ter uma estaca em cada canto do terreno, calcule:

a) A distância entre as estacas.
b) A que distância dos cantos do terreno estará a 25ª estaca.

18) Numa estrada existem duas torres de transmissão de energia, uma no quilômetro 100 e outra no quilômetro 228. Entre elas deverão ser colocados 7 postes de forma que, postes consecutivos tenham a mesma distância, assim como a de um poste adjacente a torre. Em que marcos quilométricos deverão ser colocados esses postes?

19)(ENEM) A tabela seguinte apresenta a média, em kg, de resíduos domiciliares produzidos anualmente por habitante, no período de 1995 a 2005.

Produção de resíduos domiciliares por habitante em um país

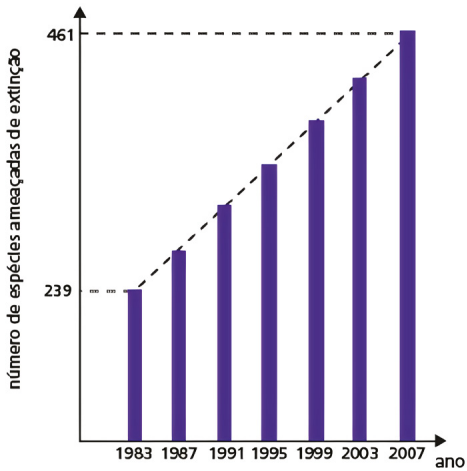
ANO	kg
1995	460
2000	500
2005	540

Se essa produção continuar aumentando, mantendo o mesmo padrão observado na tabela, a previsão de produção de resíduos domiciliares, por habitante no ano de 2020, em kg, será

a) 610
b) 640
c) 660
d) 700
e) 710

20)(ENEM) O gráfico, obtido a partir de dados do Ministério do Meio Ambiente, mostra o crescimento do número de espécies da fauna brasileira ameaçadas de extinção. Se mantida, pelos próximos anos, a tendência de crescimento mostrado no gráfico, o número de espécies ameaçadas de extinção em 2011 será igual a:

a) 465
b) 493
c) 498
d) 538
e) 699



21)(ENEM) As projeções para a produção de arroz no período de 2012 – 2021, em uma determinada região produtora, apontam para uma perspectiva de crescimento constante da produção anual. O quadro apresenta a quantidade de arroz, em toneladas, que será produzida nos primeiros anos desse período, de acordo com essa projeção.

Ano	Projeção de produção (t)
2012	50,25
2013	51,50
2014	52,75
2015	54,00

A quantidade total de arroz, em toneladas, que deverá ser produzida no período de 2012 a 2021 será de

a) 497,25. b) 500,85. c) 502,87. d) 558,75. e) 563,25.

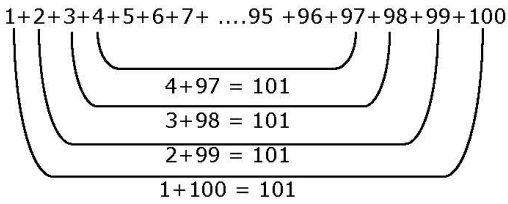
3.1.4. Soma dos termos de uma P.A

Em 30 de abril de 1777, nasce na cidade de Brunswick, hoje Alemanha, um menino de nome Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Quando criança se divertia com cálculos matemáticos. Um dia, para ocupar a classe, o professor mandou que os alunos somassem todos os números de um a cem, com instruções para que cada um colocasse sua ardosia[4] sobre a mesa logo que completasse a tarefa. Quase imediatamente, Gauss colocou sua ardosia sobre a mesa dizendo: "Aí está!". O professor olhou-o com desdém enquanto os outros trabalhavam diligentemente. Quando o instrutor finalmente olhou os resultados, a ardosia de Gauss era a única com a resposta correta, 5050, sem outro cálculo.

Fonte: (BOYER, 1996)

Como você faria essa soma? Como Gauss, que posteriormente se tornou um dos grandes matemáticos da época, efetuou os cálculos?

Presume-se que o cálculo feito mentalmente por Gauss foi:



Ele percebeu que somando o primeiro com o último, o segundo com penúltimo, o terceiro com antepenúltimo e assim sucessivamente, todos davam soma igual a 101, como eram 100 números somados em pares, concluiu que: $\frac{100}{2} \times 101 = 5.050$.

É o que também acontece com todas as progressões aritméticas, a soma do primeiro com o último termo é igual a soma do segundo com penúltimo, do terceiro com antepenúltimo, etc. Veja a demonstração a seguir.

Demonstração: Precisamos mostrar que $a_1 + a_n = a_{1+x} + a_{n-x}$, para qualquer $1 < x < n$.

A partir da fórmula do termo geral, temos

$$a_1 + a_n = \boxed{a_1 + a_1 + (n-1).r}$$

$$a_{1+x} + a_{n-x} = \underbrace{a_1 + (1+x-1).r}_{a_{1+x}} + \underbrace{a_1 + (n-x-1).r}_{a_{n-x}} \Rightarrow$$

$$a_1 + \cancel{x}r + a_1 + (n-1).r - \cancel{x}r = \boxed{a_1 + a_1 + (n-1).r}.$$

Dessa forma, já que a soma dos pares são iguais, basta multiplicar a metade da quantidade de termos pela soma de qualquer um desses pares. Como se usa mais o primeiro e o último termo, concluímos que:

[4] Um quadro negro ou branco em que o texto ou os números são feitos com giz ou outros marcadores apagáveis.

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \ldots + a_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow \boxed{S = \frac{n.(a_1 + a_n)}{2}}$$

1º exemplo: Calcule a soma dos termos da P.A (5, 10, 15, 20, 25,...50).

Solução: Para usar a fórmula da soma precisamos da quantidade de termos da P.A.

Como $a_1 = 5$, $a_n = 50$ e $r = 10 - 5 = 5$, a partir da fórmula do termo geral, temos

$$a_n = a_1 + (n-1).r \Rightarrow .\ 50 = 5 + (n-1).5 \Rightarrow 50 - 5 = (n-1).5 \Rightarrow$$

$$45 = (n-1).5 \Rightarrow (n-1).5 = 45 \Rightarrow n - 1 = \frac{45}{5} \Rightarrow$$

$$n - 1 = 9 \Rightarrow n = 9 + 1 \Rightarrow \boxed{n = 10}.$$

Utilizando a fórmula da soma, encontramos

$$S = \frac{n.(a_1 + a_n)}{2} = \frac{10.(5 + 50)}{2} = \frac{10.55}{2} = \frac{550}{2} \Rightarrow \boxed{S = 275}.$$

Outra solução: Podemos construir a P.A até o último termo ($a_n = 50$) e somar todos os termos um a um: 5+10+15+20+25+30+35+40+45+50 = 275. Porém, essa solução não é indicada para uma quantidade e/ou valores elevados.

2º exemplo: Calcule a soma dos 25 primeiros números pares positivos.

Solução: Os primeiros números pares positivos são (2,4,6,8,....). É uma P.A.

Para utilizar a fórmula da soma precisamos do último termo. Como $a_1 = 2$, $n = 25$, $r = 4 - 2 = 2$, temos

$$a_n = a_1 + (n-1).r \Rightarrow a_n = 2 + (25-1).2 \Rightarrow$$

$$a_n = 2 + 24.2 \Rightarrow a_n = 2 + 48 \Rightarrow \boxed{a_n = 50}.$$

Substituindo na fórmula:

$$S = \frac{n.(a_1 + a_n)}{2} = \frac{25.(2 + 50)}{2} \Rightarrow \boxed{S = 650}.$$

SAIBA MAIS!

Para calcular a soma dos termos de uma P.A é preciso três informações: O primeiro termo, o último e a quantidade de termos. Na ausência de qualquer uma dessas informações, deve-se utilizar a fórmula do termo geral para encontrá-la.

3º exemplo: Quantos termos precisa ter a P.A (-14,...20) para que a soma dos seus termos seja igual a 18?

Solução:

Dados: $S = 18$, $a_1 = -14$ e $a_n = 20$.

$$S = \frac{n.(a_1 + a_n)}{2} \Rightarrow 18 = \frac{n.(-14 + 50)}{2} \Rightarrow 36 = 6n \Rightarrow n = \frac{36}{6} \Rightarrow \boxed{n = 6}.$$

Resposta: 6 termos.

EXERCÍCIOS 3.3

1)Calcule a soma dos termos da P.A (-20, -15, ... , 95).

2)Calcule a soma dos termos da P.A (100, 90, ..., -100).

3)Calcule a soma dos 10 primeiros termos da P.A (7, 10, 13,...).

4)Calcule a soma dos 12 primeiros números ímpares positivos.

5)Quantos termos precisa ter a P.A (-5, ..., 50) para que a soma dos seus termos seja igual a 225?

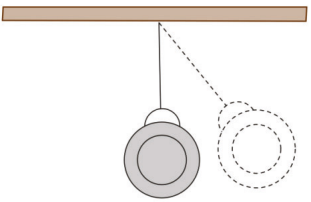
6)Um aluno ao somar, um a um, os 10 primeiros termos da P.A (5, 9, 13,...), encontrou como resultado 197. Porém, percebeu que havia esquecido um número. Que número foi esse?

7)(UFV-MG) Numa caixa há 1000 bolinhas de gude. Retiram-se 15 bolinhas na primeira vez, 20 na segunda, 25 na terceira e assim sucessivamente na mesma razão. Após a décima quinta retirada, sobrarão na caixa:

a)250 bolinhas
b)200 bolinhas
c)300 bolinhas
d)500 bolinhas
e)750 bolinhas

8)(PUC - SP) Um pêndulo, oscilando, percorre sucessivamente 18 cm, 15 cm, 12 cm, ... A soma dos percursos até o repouso é:

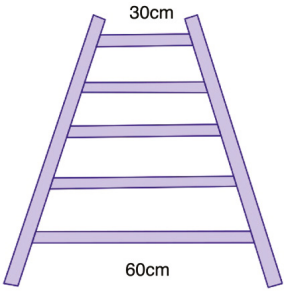
a) 45 cm b) 63 cm c) 90 cm d) 126 cm



9)(ENEM) Um marceneiro deseja construir uma escada trapezoidal com 5 degraus, de forma que o mais baixo e o mais alto tenham larguras respectivamente iguais a 60cm e a 30cm, conforme a figura abaixo.

Os degraus serão obtidos cortando-se uma peça linear de madeira cujo comprimento mínimo, em cm, dever ser:

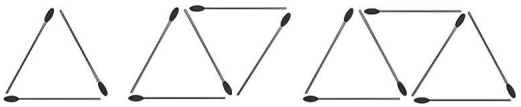
a) 144 b) 180 c) 210 d) 225 e) 240



10)(ENEM) O número mensal de passagens de uma determinada empresa aérea aumentou no ano passado nas seguintes condições: em janeiro foram vendidas 33.000 passagens; em fevereiro, 34.500; em março, 36.000. Esse padrão de crescimento se mantém para os meses subsequentes. Quantas passagens foram vendidas por essa empresa em julho do ano passado?

a) 38.000 b) 40.500 c) 41.000 d) 42.000 e) 48.000

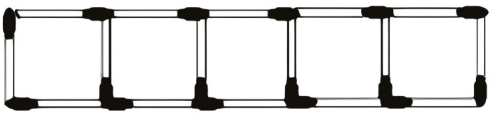
11) Seguindo o mesmo padrão, quantos palitos são necessários para formar 10 triângulos?



12) Pretende-se formar, usando palitos, uma sequência de quadrados conforme a imagem a seguir.

a)Quantos palitos são necessários para construir 10 quadrados?

b)Quantos quadrados é possível construir com 100 palitos?



13) Um teatro de apresentações possui 24 poltronas na primeira fila, 27 na segunda, 30 na terceira e assim por diante, até a última fila que é a vigésima quinta. Calcule o número de poltronas desse teatro.

14) Sobre uma mesa há 10 pilhas de moedas de 1 real. Dessas 10 pilhas, nove delas têm todas as moedas com 10 gramas cada e apenas uma das pilhas, por defeito de fabricação, contém todas as moedas com 11 gramas cada. As moedas são visualmente idênticas. Dispondo de uma balança e fazendo uma única pesagem, como é possível determinar em qual das pilhas cada moeda tem 11 gramas?

15)(ENEM) O trabalho em empresas de festas exige dos profissionais conhecimentos de diferentes áreas. Na semana passada, todos os funcionários de uma dessas empresas estavam envolvidos na tarefa de determinar a quantidade de estrelas que seriam utilizadas na confecção de um painel de Natal. Um dos funcionários apresentou um esboço das primeiras cinco linhas do painel, que terá, no total, 150 linhas.



Após avaliar o esboço, cada um dos funcionários esboçou sua resposta:

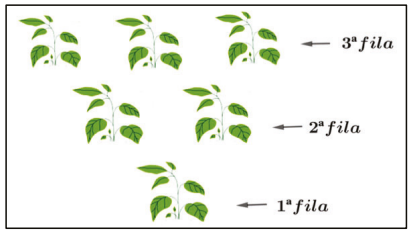
FUNCIONÁRIO I: aproximadamente 200 estrelas.

FUNCIONÁRIO II: aproximadamente 6 000 estrelas.
FUNCIONÁRIO III: aproximadamente 12 000 estrelas.
FUNCIONÁRIO IV: aproximadamente 22 500 estrelas.
FUNCIONÁRIO V: aproximadamente 22 800 estrelas.
Qual funcionário apresentou um resultado mais próximo da quantidade de estrelas necessária?

a) I b) II c) III d) IV e) V

16)15 pessoas participavam de uma reunião. Quantos apertos de mão ocorreram, sabendo que nenhum participante cumprimentou o mesmo colega mais de uma vez e todos se cumprimentaram?

17)Em um terreno triangular há uma planta na 1ª fila, duas plantas na 2ª fila, três plantas na 3ª fila, e assim por diante. Com um total de 30 filas, quantas plantas há nesse terreno?



18) Uma plantação em um terreno trapezoidal possui 48 fileiras de plantas. A 1ª fila tem 4 plantas e a última fila tem 192 plantas. Sabendo que a quantidade de plantas de cada fila estão em P.A, calcule:

a) Quantas plantas possui a 20ª fila.
b) Quantas plantas esse terreno possui ao todo.

19) Um agricultor para combater uma praga em sua lavoura, precisa pulverizar a área, utilizando uma pesticida diluída em mesma quantidade de água, todos os dias, conforme as orientações técnicas:

- 1º dia: 4 litros de pesticida;
- 2º dia: 3,6 litros de pesticida;
- 3º dia: 3,2 litros de pesticida;
- E assim sucessivamente (em progressão aritmética) até o 10º dia.

a) Quantos litros de pesticida ele deve aplicar no 10º dia.
b) Qual o total de pesticida que será utilizada nos 10 dias.

20)(FGV-RJ) Numa fazenda, o proprietário mandou plantar pés de café da seguinte forma: 100 pés na primeira semana, $(100 + x)$ pés na segunda semana, $(100 + 2x)$ na terceira semana, e assim sucessivamente, aumentando x pés a cada semana. Após vinte semanas, mandou encerrar a tarefa, com um total de 3900 pés de café plantados. O total de pés de café plantados após a oitava semana foi de:

a) 1840 b) 2670 c) 2820 d) 2460 e) 1980

3.2. Progressão geométrica (P.G)

Definição 3.2.1: Denominamos de **progressão geométrica (P.G)** uma sequência em que a razão entre um termo (a partir do 2º) e o seu antecedente é constante. E a essa constante denominamos de **razão q**.

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

A razão de uma P.G é dado pelo quociente do termo posterior pelo termo anterior.

Exemplos de P.G:

- $(2, 4, 8, 16, \ldots) \Rightarrow q = \frac{4}{2} = 2 \quad \Rightarrow (2, \overbrace{2.2}^{4}, \overbrace{4.2}^{8}, \overbrace{8.2}^{16}, \ldots)$.
- $(100, 50, 25, \ldots) \Rightarrow q = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow (100, \overbrace{100.\frac{1}{2}}^{50}, \overbrace{50.\frac{1}{2}}^{25}, \ldots)$.
- $(-1, 5, -25, \ldots) \Rightarrow q = \frac{5}{-1} = -5 \quad \Rightarrow (-1, \overbrace{-1.(-5)}^{5}, \overbrace{5.(-5)}^{-25}, \overbrace{-25.(-5)}^{125}, \ldots)$.
- $(-10, -20, -40, \ldots) \Rightarrow q = \frac{-20}{-10} = 2 \quad \Rightarrow (-10, \overbrace{-10.2}^{-20}, \overbrace{-20.2}^{-40}, \overbrace{-40.2}^{-80}, \ldots)$.

Exemplos de sequências que não são uma P.G:

- $(5,55,555\ldots)$, **não** é uma P.G, pois $\frac{55}{5} \neq \frac{555}{55}$.

Para que seja P.G, é preciso que todas as razões entre um termo e o anterior sejam iguais (constantes).

- $(-1,-3,-5\ldots)$, **não** é uma P.G, pois $\frac{-3}{-1} \neq \frac{-5}{-3}$.

3.2.1. Classificação das progressões geométricas

- Quando $a_1 > 0$ e $q > 1$ ou $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$, a P.G é **crescente** (os termos crescem da esquerda para a direita);
- Quando $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$ ou $a_1 < 0$ e $q > 1$, a P.G é **decrescente** (os termos decrescem da esquerda para direita);
- Quando $q = 1$, a P.G **é constante** (os termos são iguais);
- Quando $q < 0$, a P.G é **alternante** (ora termo positivo, ora termo negativo).

Exemplos:

- $(5,15,45,\ldots) \Rightarrow$ P.G crescente (cresce da esquerda para direita). Observe que $a_1 > 0$ e $q > 1$.
- $(-10,-2, -\frac{2}{5}, \ldots) \Rightarrow$ P.G crescente (cresce da esquerda para direita). Perceba que,

nesse caso, $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$.

- (200,100,50,...) ⇒ P.G decrescente(decresce da esquerda para direita). Veja que $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$.
- (-4,-12,-36,...) ⇒ P.G decrescente(decresce da esquerda para direita). Nesse caso, $a_1 < 0$ e $q > 1$.
- (..., 8, 8, 8, 8,...) ⇒ P.G constante (termos iguais, $q = 1$).
- (7, -14, 28, -56, ...) ⇒ P.G alternante($q < 0$, ora termo positivo, ora termo negativo).

1º exemplo: Classifique somente as sequências que são progressões geométricas.

a) (...,11,121,132,...) ⇒ Não é uma P.G, pois $\frac{121}{11} \neq \frac{132}{121}$.

b) (...-1, -10, -100,...) ⇒ P.G decrescente.

c) (8, 88, 888,...) ⇒ Não é uma P.G, pois $\frac{88}{8} \neq \frac{888}{88}$.

d) (-5, 35, -245,...) ⇒ P.G alternante.

e) (...,11, 11, 11, 11, ...) ⇒ P.G constante.

f) (6,18,54,...) ⇒ P.G crescente.

g) $(5,1,\frac{1}{5},\frac{1}{25},...)$ ⇒ P.G decrescente.

2º exemplo: Determine o valor de x na P.G $(2x, 36, 18x)$.

Solução: Por se tratar de progressão geométrica, todas as razões entre um termo e o anterior são constantes. Isto é:

$$\frac{36}{2x} = \frac{18x}{36} \Rightarrow 36x^2 = 36.36 \Rightarrow x^2 = \frac{36.36}{36} \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = \pm\sqrt{36} \Rightarrow \boxed{x = \pm 6}.$$

Para $x = 6 \Rightarrow (12, 36, 108)$.

Para $x = -6 \Rightarrow (-12, 36, -108)$.

3º exemplo: Qual é o valor do último termo da sequência $(\frac{1}{9}, 1, \_\_\_\_, \_\_\_\_)$, sabendo que é uma progressão geométrica?

Solução: Para encontrar qualquer termo de uma P.G precisamos de sua razão.

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\text{Termo posterior}}{\text{Termo anterior}} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = 1.\frac{9}{1} = 9.$$

Para calcular os termos que ficam à esquerda de qualquer termo, devemos dividir o termo pela razão. Para calcular termos que ficam à direita de qualquer outro termo, multiplicamos esse termo pela razão. Como os termos que procuramos ficam todos à direita, vamos multiplicá-los sucessivamente por 9. Assim:

$\frac{1}{9}.9 = \mathbf{1}$, $1.9 = \mathbf{9}$ e $9.9 = \mathbf{81}$. Resposta: $(\frac{1}{9}, 1, 9, 81)$.

EXERCÍCIOS 3.4

1)Classifique somente as sequências que representam uma P.G.

a) (-1, -2, -4, -6,...)

b) (...$-a$, - a, - a,...)

c) (1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, ...)

d) (4, 12, 36, ...)

e) (-2, -8, -32, ...)

f) ($\frac{1}{7}$, -1, 7, ...)

2)Complete os espaços em branco com um elemento pertencente a P.G.

a)(__, 3, 12)

b)(11, 22,____)

c)(-4, ____, -16)

d)(-999, __, -999)

e)($\frac{1}{5}$,__, 5)

3)Construa uma P.G de 5 elementos em que:

a) a_1= -1 e a razão q = 2.

b) a_3= 18 e a razão q = -3.

c) a_5= 64 e a razão q = 2.

d) a_4= -500 e a razão q = 1.

4) Os números da progressão geométrica (x – 5, $2x$ – 4, $5x$ + 8) são positivos. Qual o valor de x?

5) Elabore uma sequência que seja tanto uma P.A como também, uma P.G. Qual a sua característica?

6) Seja a progressão geométrica (1, 2, 4, 8,...) de n elementos e a progressão aritmética (2, 4, 6, 8,...) de p elementos. Quantos elementos há em comum nessas progressões, sabendo que $n \leq p$?

7)Sendo a_1e q, o primeiro termo e a razão, respectivamente de uma P.G. Essa é decrescente quando:

a) $a_1 > 0$ e $q > 1$

b) $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$

c) $q = 1$

d) $q < 0$

e) $a_1 < 0$ e $q > 1$

8)Uma progressão geométrica de razão q é dita alternante, quando:

a) $q > 1$

b) $q < 1$

c) $q = 1$

d) $q < 0$

e) $q = 0$

3.2.1. Fórmula do termo geral de uma P.G

Vimos que para encontrar um número à direita (ou o próximo termo) de uma P.G é preciso multiplicar este número pela razão, da seguinte forma:

$(a_1, \ldots)$ próximo $\Rightarrow (a_1, a_1.q, \ldots)$, próximo $\Rightarrow (a_1, a_1.q, a_1.q.q, \ldots)$, assim por diante. Logo:

$$\left(a_1, \underbrace{a_1.\overset{q^1}{\overbrace{q}}}_{a_2}, \underbrace{a_1.\overset{q^2}{\overbrace{q.q}}}_{a_3}, \underbrace{a_1.\overset{q^3}{\overbrace{q.q.q}}}_{a_4}, \ldots, a_1.q^{n-1}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{a_n = a_1.q^{n-1}}$$

Podemos também generalizar a fórmula para qualquer termo a_x. Se

$$a_n = a_1.q^{n-1} \Rightarrow \boxed{a_1 = \frac{a_n}{q^{n-1}}} (1)$$

E se um termo qualquer a_x é diferente de a_1, então

$$a_x = a_1.q^{x-1} \Rightarrow \boxed{a_1 = \frac{a_x}{q^{x-1}}} (2)$$

Igualando (1) e (2), concluímos que:

$$\boxed{a_n = a_x.q^{n-x}}$$

Esta é a fórmula geral usada para qualquer termo. Observe que $x = 1$, implica em $a_n = a_1.q^{n-1}$.

1º exemplo: Qual o 8º termo da P.G (1, 2, 4, ...)?

Solução: Dados: $a_1 = 1, q = \frac{2}{1} = 2$ e $n = 8$ (8º termo).

De acordo com a fórmula do termo geral, temos

$a_n = a_1.q^{n-1} \Rightarrow a_8 = a_1.q^{8-1} \Rightarrow a_8 = a_1.q7 \Rightarrow a_8 = 1.27 \Rightarrow \boxed{a_8 = 128}$.

Uma solução seria continuar a P.G até chegar no 8º termo: (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128).

2º exemplo: Qual o 7º termo da P.G (-1, 3, -9, ...)?

Solução: Temos: $a_1 = -1, q = \frac{3}{-1} = -3$ e $n = 7$ (7º termo).

A partir da fórmula do termo geral, encontramos

$$a_n = a_1.q^{n-1} \Rightarrow a_7 = a_1.q^{7-1} \Rightarrow a_7 = a_1.q6 \Rightarrow$$
$$a_7 = -1.(-3)^6 \Rightarrow \boxed{a_7 = -729}.$$

3º exemplo: Determine o 3º termo de uma P.G cuja razão é -2 e seu 11º termo é 256.

Solução: A relação entre a_3 e a_{11}, segundo a fórmula do termo geral é

$$a_{11} = a_3 . q^{11-3}.$$

Aos substituir os dados: $q = -2$ e $a_{11} = 256$, obtemos

$$a_{11} = a_3 . q^{11-3} \Rightarrow a_{11}\, a_3 . q^8 \Rightarrow 256 = a_3 . (-2)8 \Rightarrow$$

$$a_3 = \frac{256}{(-2)^8} = \frac{256}{256} \Rightarrow \boxed{a_3 = 1}.$$

Outra forma de resolver é dividindo sucessivamente o $a_{11} = 256$ pela razão -2, até chegar no a_3. Veja:

$$(\underbrace{256}_{a_{11}}, -128, 64, -32, 16, -8, 4, -2, \underbrace{1}_{a_3}, \ldots).$$

4º exemplo: Quantos termos possui a P.G $(50, 10, \ldots \frac{2}{25})$?

Solução:

As informação são: $a_1 = 50$, $q = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$ e $a_n = \frac{2}{25}$.

$$a_n = a_1 . q^{n-1} \Rightarrow \frac{2}{25} = 50 . \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{\frac{2}{25}}{50} = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \Rightarrow$$

$$\frac{2}{25} . \frac{1}{50} = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{25.25} = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{5^4} = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^4 = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \Rightarrow 4 = n - 1 \Rightarrow n - 1 = 4 \Rightarrow n = 4 + 1 \Rightarrow \boxed{n = 5}.$$

Outra solução seria continuar a sequência até $\frac{2}{25}$ e contar os elementos:

$$(50, 10, 2, \frac{2}{5}, \frac{2}{25}).$$

Resposta: 5 elementos.

5º exemplo (interpolação geométrica): Interpole cinco termos entre 7 e 448, de forma que se obtenha uma P.G.

Solução: Interpolar é inserir cinco termos entre 7 e 448. Se são 5 termos entre 7 e o 448, então o 448 é o a_7. Dessa forma: $a_1 = 7$ e $a_7 = 448$.

Aos substituir esses dados na fórmula do termo geral, encontramos

$$a_n = a_1 . q^{n-1} \Rightarrow a_7 = a_1 . q^{7-1} \Rightarrow a_7 = a_1 . q^6 \Rightarrow$$

$$448 = 7 . q^6 \Rightarrow q^6 = \frac{448}{7} \Rightarrow q^6 = 64 \Rightarrow \sqrt[6]{64} \Rightarrow \boxed{q = 2}.$$

Resposta: (7, 14, 28, 56, 112, 224, 448).

EXERCÍCIOS 3.5

1) Qual o 6º termo da P.G (3, 6, 12, ...)?

2) Qual o 10º termo da P.G ($\frac{1}{3}$, 1, 3, ...)?

3) Qual o 5º termo da P.G ($\frac{1}{4}$, $\frac{-1}{2}$, 1, ...)?

4) Qual o 7º termo da P.G (-1, -4, -16,...)?

5)Indique os termos ausentes nas progressões geométricas a seguir.

a)(-1, ____, ____, -8)
b)(____, 270, ____, ____,10)
c) (____, ____, ____, 7,-7)

6) Calcule o número de termos de cada P.G:
a)(2, 4,..., 4096)
b)(-4, -2, ..., $\frac{-1}{128}$)
c) (4, 12 ,..., 8748)

7) Determine o 3º termo de uma P.G cuja razão é 3 e seu 6º termo é 972.

8) Determine o 2º termo de uma P.G cuja razão é $\frac{1}{5}$ e seu 5º termo é 1.

9) Interpole 9 termos entre 1 e 1024, de forma que se obtenha uma P.G.

10) Interpole 5 meios geométricos entre 7 e 28672.

11) Em uma P.G o $a_2 . a_3 . a_4 = 1$, sabendo que o a_1=2 calcule o a_7.

12) (PUC – RJ) João tem três filhas. A filha mais velha tem oito anos a mais que a do meio que por sua vez tem sete anos mais que a caçula. João observou que as idades delas formam uma progressão geométrica. Quais são as idades delas?

13) O proprietário de um laranjal percebeu que a primeira fileira de sua plantação, tinha um pé de laranja acometido por uma praga, na segunda fileira: 3 pés de laranja, na terceira fileira: 9 pés de laranja acometidos pela mesma praga.

Mantendo o mesmo padrão de crescimento, quantos pés de laranjas estarão acometidos pela praga na 6ª fileira?

14)(UNESP) O artigo "Uma estrada, muitas florestas" relata parte do trabalho de reflorestamento necessário após a construção do trecho sul do Rodoanel da cidade de São Paulo. O engenheiro agrônomo Maycon de Oliveira mostra uma das árvores, um fumo-bravo, que ele e sua equipe plantaram em novembro de 2009. Nesse tempo, a árvore cresceu – está com quase 2,5 metros –, floresceu, frutificou e lançou sementes que germinaram e formaram descendentes [...] perto da árvore principal. O fumo-bravo [...] é uma espécie de árvore pioneira, que cresce rapidamente, fazendo sombra para as espécies de árvores de crescimento mais lento, mas de vida mais longa.

(Pesquisa FAPESP, janeiro de 2012. Adaptado.)

Considerando que a referida árvore foi plantada em 1.º de novembro de 2009 com uma altura de 1 dm e que em 31 de outubro de 2011 sua altura era de 2,5 m e admitindo ainda que suas alturas, ao final de cada ano de plantio, nesta fase de crescimento, formem uma progressão geométrica, a razão deste crescimento, no período de dois anos, foi de

a) 0,5
b) $5.10^{-1/2}$
c) 5
d) $5.10^{1/2}$
e) 50



Espécie da árvore fumo-bravo (w3.ufsm.br/herbarioflorestal)

15)(CESPE-UNB) Como parte de um programa de reflorestamento, foi realizado um estudo durante o qual foram plantados três tipos de árvores, A, B e C, em três locais diferentes de uma região na qual não havia nenhuma dessas espécies. Inicialmente, foram plantadas 1.000 unidades de cada tipo de árvore e observou-se que a quantidade de unidades de cada espécie aumentava da seguinte forma:

- O tipo A triplicava a cada 4 anos;
- O tipo B duplicava a cada 3 anos;
- O tipo C aumentava em 2.000 unidades anualmente.

Com base nessas informações, as quantidades de árvores dos três tipos aumentam periodicamente, sempre em progressão geométrica.

( ) Certo
( ) Errado

3.2.2. Fórmula da soma dos termos de uma P.G

Vamos encontrar uma fórmula que calcule a soma dos termos de uma P.G, utilizando apenas três informações: o primeiro termo, a razão e quantidade de termos.

Se $\boxed{S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n}$ (1), então:

$$S.q = a_1.q + a_2.q + a_3.q + a_4.q \ldots + a_n.q$$

Como: $a_1.q = a_2, a_2.q = a_3, a_3.q = a_4$, etc. Temos

$$\boxed{S.q = a_2.q + a_3.q + a_4.q + \ldots + a_n + a_n.q}. \quad (2)$$

Fazendo (1) – (2), obtemos

$$S - S.q = a_1 - a_n.q.$$

Uma vez que $a_n = a_1.\ q^{n-1}$, encontramos

$$\boxed{S = \frac{a_1.(q^n - 1)}{q - 1}} \quad \text{para } q \neq 1.$$

1º exemplo: Calcule a soma dos 10 primeiros termos da PG (1, 2, 4, ...).

Solução: Os dados são: $a_1 = 1$, $q = \frac{2}{1} = 2$ e $n = 10$ (10 primeiros termos). Pela fórmula da soma, temos

$$S = \frac{a_1.(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow S = \frac{1.(2^{10} - 1)}{2 - 1} \Rightarrow S = \frac{(1024 - 1)}{2 - 1} \Rightarrow \boxed{S = 1023}.$$

Poderíamos também continuar a P.G até o 10º termo e somar todos eles:

$(1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512) \Rightarrow 1+4+8+16+32+64+128+256+512 = 1023.$

2º exemplo: Calcule a soma dos 9 primeiros termos da PG (3, -6, 12, ...).

Solução: $a_1 = 3, q = \frac{-6}{3} = -2$ e $n = 9$ (9 primeiros termos).

$$S = \frac{a_1.(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{3.((-2)^9 - 1)}{-2 - 1} = \frac{3.(-512 - 1)}{-3} = \frac{-513}{-1} \Rightarrow \boxed{S = 513}.$$

Veja que realmente a soma dos 9 primeiros termos da P.G é 513:

$3 - 6 + 12 - 24 + 48 - 96 + 192 - 384 + 768 = 513.$

3º exemplo: Sabendo que a soma dos 5 primeiros termos de uma P.G é 2.387 e que sua razão é 4. Qual o 1º termo?

Solução:

$$S = \frac{a_1.(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow 2387 = \frac{a_1.(4^5 - 1)}{4 - 1} \Rightarrow 2387.3 = a_1(1024 - 1) \Rightarrow$$

$$7161 = a_1.1023 \Rightarrow a_1 = \frac{7161}{1023} \Rightarrow \boxed{a_1 = 7}.$$

EXERCÍCIOS 3.6

1)Calcule a soma dos 9 primeiros termos da PG (3, 6, 12, ...).

2)Calcule a soma dos 5 primeiros termos da PG (-11, -33, -99, ...).

3)Calcule a soma dos 30 primeiros termos da PG (-30, 30, -30, ...).

4)Calcule o valor de x na equação $x + 5x + 25x + \ldots + 3125x = 7812$.

5)Sabendo que a soma dos 7 primeiros termos de uma P.G é 635 e que sua razão é 2. Qual o valor do seu 3º termo?

6)Considere a seguinte PG: (1, −1, 1, −1, ...).

a) Qual a soma dos 1000 primeiros termos?

b) Qual a soma dos 897 primeiros termos?

c) Qual a soma dos n primeiros termos?

7) Um aluno escreveu a soma de potências de base 2 e percebeu um padrão:

- ✓ $1 + 2^1 = 2^2 - 1$
- ✓ $1 + 2^1 + 2^2 = 2^3 - 1$
- ✓ $1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 2^4 - 1$
- ✓ $1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 2^5 - 1$

É verdade que $1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots 2^n = 2^{n+1} - 1$?Justifique.

8)Qual o valor de S = $1 + 11 + 111 + 1111 + \ldots + \underbrace{1111111111}_{\text{10 algarismos}}$?

9)(FURG-RS) O dono de uma loja precisa, com urgência, de vendedores para trabalhar de segunda a sábado nas duas últimas semanas que antecedem o Natal. Apareceram três candidatos. Ele oferece R$ 1,00 pelo primeiro dia de trabalho e, para os dias seguintes, o dobro do que eles recebem no dia anterior. Dois candidatos consideram humilhante a proposta e recusam-na. O candidato que conhece Matemática aceita a proposta. Então, ele receberá, pelos doze dias de trabalho, a importância de:

a)R$ 240,00

b)R$ 4.095,00

c) R$ 3.400,00

d) R$ 5.095,00

e) R$ 1.095,00

10)(UPE)No primeiro dia de um experimento laboratorial, exatamente uma gota de uma dada substancia e acrescentada a um balão de ensaio inicialmente vazio. Nos dias seguintes, a cada dia e acrescentada exatamente uma gota a mais que o dobro do numero de gotas do dia anterior (por exemplo, no 2º dia, serão adicionadas 3 gotas). Ao final do 10º dia, terão sido acrescentadas, ao todo, exatamente

a) 1043 gotas.
b) 2086 gotas.
c) 1023 gotas.
d) 2046 gotas.
e) 2036 gotas.

11)Em um experimento de adubação nitrogenada para verificar o desenvolvimento de uma cultura, deve-se aplicar doses diferentes de nitrogênio em cada canteiro. Nesse experimento, há disponível $360 kg.ha^{-1}$ de nitrogênio a serem distribuídos em nove canteiros. Calcule a dose que deve ser aplicada em cada canteiro, se:

a) As doses dos canteiros devem estar em P.A e o primeiro canteiro deve receber dose nula de nitrogênio.

b) O primeiro canteiro deve ter dose de $105 kg.ha^{-1}$ de nitrogênio, e as demais doses, dos demais canteiros, devem estar em P.G de razão 2.

12)(PUC-SP) Os termos da soma S = 4 + 8 + 16 + ... + 2048 estão em progressão geométrica. Assinale o valor de S.

a) 4092
b) 4100
c) 8192
d) 65536
e) 196883

13)(ITA) Seja (a_1, a_2, a_3...) uma progressão geométrica (PG) infinita de razão a_1, com $0 < a_1 < 1$, e soma igual a $3a_1$. A soma dos 3 primeiros termos dessa progressão geométrica é:

a) 8/27
b) 20/27
c) 26/27
d) 30/27
e) 38/27

3.2.3. Limite da soma dos termos de uma P.G infinita

Progressões geométricas com razão maior que -1 e menor que 1 ($-1 < q < 1$) e diferente de zero, possui um limite de soma para os seus termos.

Exemplo: Vamos calcular a soma dos termos da P.G (40, 20, 10,...).

Solução: $q = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$ ($-1 < q < 1$). Calculando a soma dos 7 primeiros termos:

$$S = \frac{a_1.(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_7 = \frac{40.\left(\left(\frac{1}{2}\right)^7 - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{40.\left(\frac{1}{128} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{40.\left(\frac{-127}{128}\right)}{\frac{-1}{2}} \Rightarrow$$

$$S_7 = 80.\left(\frac{-127}{-128}\right) = \frac{10160}{128} \Rightarrow \boxed{S_7 = 79{,}375}.$$

A soma dos 10 primeiros termos é: $S_{10} \cong 79{,}92...$

A soma dos 20 primeiros termos é: $S_{20} \cong 79{,}9999...$

A soma dos 30 primeiros termos é: $S_{30} \cong 79{,}99999...$

Na medida em que aumentamos o número de termos a soma tende à 80. Então, dizemos que o limite da soma dessa P.G é 80.

Isso sempre acontece porque quando $-1 < q < 1$ e n tende a valores elevados, q^n tende a zero. Nesse entendimento, é indicado usar a formula a seguir.

$$S = \frac{a_1.(\overset{0}{\overbrace{q^n}} - 1)}{q - 1} = \frac{a_1.(-1)}{q - 1} = \frac{a_1}{1 - q} \Rightarrow \boxed{S = \frac{a_1}{1 - q}}$$

2º exemplo: Qual o limite da soma dos termos da P.G $(-5, -\frac{5}{3}, -\frac{5}{9}, ...)$

Solução: $q = \frac{-\frac{5}{3}}{-5} = -\frac{5}{3}.\frac{1}{-5} = \frac{1}{3}$ ($-1 < q < 1$). Então, há um limite para soma.

$$S = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{-5}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{-5}{\frac{2}{3}} = \frac{-5.3}{2} \Rightarrow \boxed{S = \frac{-15}{2}}.$$

3º exemplo: Um atleta pretende alcançar uma meta de 41km de caminhada. A fim de evitar esgotamentos físicos, resolve fazer o percurso da seguinte forma: no primeiro dia ele caminha 27km, no segundo dia só 9km, no terceiro só 3km, etc, ou seja, ele caminha sempre 1/3 do percurso do dia anterior. É possível, mesmo que de forma fictícia ele caminhe apenas centímetros, alcance a meta dos 41km pretendida?

Solução: $q = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$ ($-1 < q < 1$).

$$S = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{27}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{27}{\frac{2}{3}} = \frac{27.3}{2} = \frac{81}{2} \Rightarrow \boxed{S = 40{,}5}.$$

Resposta: A meta dos 41km não pode ser alcançada.

EXERCÍCIOS 3.7

1)Qual o limite da soma dos termos da P.G (200, 100, 50,...)

2)Calcule o limite das somas a seguir:

a)$3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \ldots$

b)$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \ldots$

c)$80 + 8 + \frac{8}{10} + \ldots$

d)$10^5 + 10^4 + 10^3 + \ldots$

3)Calcule o valor de x na equação $4x + 2x + x + \ldots = 40$.

4)Calcule o valor de x na equação $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} + \ldots = 128$.

5)(UFJF-MG) Uma bola de borracha cai de uma altura de 30m. Após o choque com o solo, a bola sobe a uma altura igual a $\frac{1}{3}$ da altura anterior. Se deixarmos a bola subir e descer sem interrupção, qual será a distância total percorrida por ela?

6) É possível com o uso de limite da soma de uma P.G encontrar frações geratrizes de números com dízimas periódicas.

Por exemplo, a fração correspondente ao decimal 0,555... é o mesmo que: $\frac{5}{10} + \frac{5}{100} + \frac{5}{1000} + \ldots$ uma P.G infinita de razão $q = \frac{1}{10}$ ($-1 < q < 1$). Calculando essa soma, temos: $S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{5}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{5}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{5}{9}$ (a fração geratriz).

Usando o mesmo princípio calcule a fração geratriz de 0,222... e de 3,111...

7)Qual o valor de $\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}}}\ldots$?

8)O pagamento de uma dívida de R$ 1100,00 foi acertada em parcelas. A 1ª parcela será de R$ 500,00, e as demais sempre a metade da parcela anterior, ou seja, a segunda de R$ 250,00, a terceira de R$ 125,00, assim sucessivamente. Em que número de parcela ocorrerá a quitação da dívida?

3.3. Juros

Nesta seção, iniciaremos os estudos sobre matemática financeira básica, abordando duas modalidades de juros baseadas em progressões aritméticas e geométricas. São eles, respectivamente: os juros simples e os juros compostos. Antes, precisamos de algumas definições.

Quando uma pessoa empresta um valor monetário a outra pessoa ou faz uma aplicação em uma instituição financeira, durante um certo tempo, este valor monetário é chamado de **capital(c)**.

O aluguel do dinheiro que o tomador (quem pediu o empréstimo) paga a quem emprestou ou o rendimento do valor monetário aplicado em instituição financeira é denominado de **juros (j).**

A taxa de juros (i) é o percentual cobrado pelo capital emprestado ou aplicado, numa certa unidade de tempo. Pode ser ao dia (a.d), ao mês (a.m), ao semestre (a.s), ao ano (a.a), etc.

O **montante (M)** é a soma do capital emprestado ou aplicado com os juros do período.

3.3.1. Juros simples

Juros simples é o juros cobrado sobre o capital, porém ao final de cada período, este não é incorporado ao capital, ou seja, o juros simples é um valor fixo cobrado ao final cada período.

Por exemplo, uma pessoa empresta R$ 100,00 a outra, com juros simples de 10% a.m (ao mês). Então, os juros serão de:

$100.10\% = 100.\ \frac{10}{100} = 10 \implies$ R$ 10,00 a cada mês.

A tabela a seguir nos fornece o valor a ser pago pelo tomador a cada mês, iniciando no 1º mês após a data do empréstimo.

Mês	1º	2º	3º	4º	5º
Valor (R$)	110,00	120,00	130,00	140,00	150,00

Observamos que a sequência da tabela é uma progressão aritmética de razão R$ 10,00. E não é por acaso, em todas as operações financeiras envolvendo juros simples, os valores adicionados ao capital (1º termo), terão sempre um mesmo valor (razão), que nesse caso, é dado pelo produto do capital pela taxa acordada.

Assim, utilizando a fórmula do termo geral de uma P.A, temos

$$\underbrace{a_n}_{Montante(M)} = \underbrace{a_1}_{Capital(c)} + \underbrace{(n-1)}_{Período(t)} . \underbrace{r}_{Juros(j)} .$$

Como a razão r é dada por $j = c.i$, temos: $M = c + \underbrace{c.i.t}_{Juros}$.

Onde:

$$j = c.i.t$$

- j – juros do período
- c – o capital
- i – a taxa de juros (na forma decimal)
- t – o período (ou tempo)

$$M = c + j$$

- M – Montante
- c – o capital
- j – o juros

Observação: No uso da fórmula: $j = c.i.t$, o período t e a taxa i precisam estar na mesma unidade. Por exemplo, se a taxa i for a.m (ao mês), o período precisa estar em meses, se a taxa i for a.a (ao ano), o período precisa estar em anos, e assim por diante. Quando não houver compatibilidade de unidades entre a taxa e o período, é preciso fazer as devidas transformações antes de usar a fórmula.

Como no sistema financeiro um mês tem 30 dias, então para transformar:

a taxa i
de dia para mês, multiplique a taxa por 30.
de dia para ano, multiplique a taxa por 360.
de mês para ano, multiplique a taxa por 12.
de mês para dia, divida a taxa por 30.
de ano para mês, divida a taxa por 12.
de ano para dia, divida a taxa por 360.

O período t
de dia para mês, divida por 30.
de dia para ano, divida por 360.
de mês para ano, divida por 12.
de mês para dia, multiplique por 30.
de ano para mês, multiplique por 12.
de ano para dia, multiplique por 360.

É claro que não há necessidade nenhuma em memorizar essa tabela, usando a lógica ou uma regra de três simples é possível transformar as unidades sem consulta.

1º exemplo: Um capital de R$ 7.000,00 foi aplicado durante 6 meses à uma taxa de juros simples de 0,5% a.m . Calcule os juros e o montante recebido.

Solução: Como a taxa e o período estão na mesma unidade, podemos substituir diretamente na fórmula.

$j = c.i.t \Rightarrow j = 7000.0{,}005.6 \Rightarrow j = 210.$

$M = c + j \Rightarrow M = 7000 + 210 \Rightarrow M = 7210.$

Resposta: Juros R$ 210,00 e Montante R$ 7.210,00.

2º exemplo: Um capital de R$ 500,00 foi aplicado durante 18 meses à uma taxa de juros simples de 24% a.a . Calcule os juros e o montante recebido.

Solução: Observe que o período é de 18 meses e a taxa e de 24% a.a (ao ano), portanto, precisamos transformar a taxa ao mês ou o período ao ano, antes de aplicar a fórmula. Transformando a taxa para ao mês: $i = \frac{24\%}{12} = 2\%$ a.m. Aplicando na fórmula:

$j = c.i.t \Rightarrow j = 500.0{,}02.18 \Rightarrow j = \text{R\$}180{,}00.$

$M = c + j \Rightarrow M = 500 + 180 \Rightarrow M = \text{R\$}680{,}00.$

Podemos resolver de outra forma usando o período transformado em anos:

$t = \frac{18}{12} = \frac{3}{2} = 1{,}5$ anos (um ano e meio)

$j = c.i.t \Rightarrow j = 500.0{,}24.1{,}5 \Rightarrow j = 180 \Rightarrow M = 500 + 180 \Rightarrow M = \text{R\$}680{,}00.$

Resposta: Juros R$ 180,00 e Montante R$ 680,00.

3º exemplo: Eduardo emprestou para o Renato uma quantia de R$ 300,00 a juros simples. No final dos 3 meses, conforme o combinado, Renato pagou o montante de R$ 570,00 quitando o empréstimo. Qual a taxa de juros do empréstimo?

Solução: Se o Renato pagou um montante de R$ 570,00 de um capital de R$ 300,00, então os juros foi de $j = 570 - 300 = 270$. Substituindo este valor com os demais na fórmula, temos

$j = c.i.t \Rightarrow 270 = 300.i.3 \Rightarrow 270 = 900.i \Rightarrow i = \frac{270}{900} = 0{,}3 \Rightarrow i = 30\%$ a.m.

Resposta: taxa de 30% ao mês.

4º exemplo: Um capital de R$ 800,00 foi aplicado a juros simples de 12% a.a por um determinado período, rendendo no final um montante de R$ 864,00. Qual o período da aplicação?

Solução: $j = 864 - 800 = 64$. Substituindo este valor com os demais na fórmula, temos

$j = c.i.t \Rightarrow 64 = 800.\frac{12}{100}.t \Rightarrow 64 = 96.t \Rightarrow t = \frac{64}{96} = 0{,}666\ldots$ anos.

Mas, quanto é 0,666... anos? Basta multiplicar por 12 para termos o período em meses (ou usar uma regra de três simples): $t = 0{,}666\ldots x12 = 8$ meses.

5º exemplo: (ESPM-SP) Um capital aplicado a juros simples de 5% a.m, triplica o seu valor em:

a) 2 anos e meio
b) 2 anos e 8 meses
c) 3 anos
d) 3 anos e 4 meses
e) 4 anos

Solução: Se um capital c triplica o seu valor, então o montante $M = 3.c$.

O juros é $j = M - c$, logo: $j = 3c - c = 2c$.

Substituindo na fórmula: $j = c.i.t \Rightarrow 2c = c.\frac{5}{100}.t \Rightarrow t = \frac{200c}{5c} = 40$ meses.

$t = 40$ meses $\Rightarrow$ 3 anos e 4 meses (letra d).

EXERCÍCIOS 3.8

1) Um capital de R$ 1.000,00 foi aplicado durante 5 meses à uma taxa de juros simples de 2% a.m . Calcule os juros e o montante recebido.

2) Um capital de R$ 15.000,00 foi aplicado durante 30 meses, a uma taxa de juros simples de 8% a.a. Qual o montante recebido?

3) Uma empresa tomou um empréstimo junto a um banco de R$ 30.000,00, a uma taxa de juros simples de 0,3% a.m para pagamento em 25 dias. Qual o montante a ser pago?

4)Um cliente financiou a compra de um imóvel no valor de R$ 700.000,00 a uma taxa de juros simples mensal de 0,2% a ser pago no final de 4 anos. Qual o valor final do imóvel?

5)Quanto tempo é necessário para que um capital de R$ 950,00 aplicado a uma taxa de 144% a.a, renda de juros R$ 912,00?

6)(UF–PI) Uma quantia foi aplicada a juros simples de 6% ao mês, durante 5 meses e, em seguida, o montante foi aplicado durante mais 5 meses, a juros simples de 4% ao mês. No final dos 10 meses, o novo montante foi de R$ 234,00. Qual o valor da quantia aplicada inicialmente?

7)(CESPE-UNB) No regime de juros simples, determinado capital investido durante 2,5 meses produziu o montante de R$ 12.000,00. O mesmo capital, investido durante 5 meses, no mesmo regime de juros, produziu o montante de R$ 14.000,00. Nesse caso, é correto afirmar que esse capital é

a) inferior a R$ 9.400,00.
b) superior a R$ 9.400,00 e inferior a R$ 9.800,00.
c) superior a R$ 9.800,00 e inferior a R$ 10.200,00.
d) superior a R$ 10.200,00 e inferior a R$ 10.600,00.
e) superior a R$ 10.600,00.

8)(ENEM) Uma pessoa aplicou certa quantia em ações. No primeiro mês, ela perdeu 30% do total do investimento e, no segundo mês, recuperou 20% do que havia perdido. Depois desses dois meses, resolveu tirar o montante de R$ 3 800,00 gerado pela aplicação.

a) R$ 4.222,22.
b) R$ 4.523,80.
c) R$ 5.000,00.
d) R$ 13.300,00.
e) R$ 17.100,00.

3.3.2. Juros compostos

Ao contrário do juro simples, no sistema de juro composto, os juros ao final de cada período são incorporados ao capital. É o famoso "juros sobre juros" cobrados pelos bancos e instituições financeiras.

Para fins comparativos, tomemos o mesmo exemplo abordado em juros simples: o montante de um capital de R$ 100,00 emprestado a juros de 10% a.m. Porém, emprestado agora mediante aos juros compostos.

$j = 100.10\% = 100.0{,}1 = 10{,}00 \Rightarrow M = 100 + 10 = \mathbf{110{,}00 \Rightarrow 1º\ mês}$.

Incorporando o juros de R$ 10,00, o capital passar a ser de $c = 110{,}00$.

$j = 110.10\% = 110.0{,}1 = 11{,}00 \Rightarrow M = 110 + 11 = \mathbf{121{,}00 \Rightarrow 2º\ mês.}$

Incorporando o juros de R$ 11,00, o capital passar a ser de $c = 121{,}00$.

$j = 121.10\% = 121.0{,}1 = 12{,}10. \Rightarrow M = 121 + 12{,}10 = \mathbf{133{,}10 \Rightarrow 3º\ mês.}$

Assim sucessivamente. Veja o quadro com os cinco primeiros meses:

Mês	1º	2º	3º	4º	5º
Valor (R$)	110,00	121,00	133,10	146,41	161,05

A sequência do quadro é uma progressão geométrica de razão 1,1 (Verifique!). E não é por acaso, em todas as operações financeiras envolvendo juros compostos, os juros são incorporados ao capital, resultando em uma progressão geométrica de razão $(1 + i)$.

Demonstração:

$j = c.i$ (1º período n) $\Rightarrow$ incorporando o novo capital, temos o montante

$$M = c + c.i = c(1 + i).$$

Para $n = 2 \Rightarrow j = c(1 + i).i \Rightarrow$ incorporando o novo capital, temos o montante

$$M = c(1 + i) + c(1 + i).i = c(1 + i)^2.$$

Para $n = 3 \Rightarrow j = c(1 + i)^2.i \Rightarrow$ incorporando o novo capital, o montante é

$$M = c(1 + i)^3.$$

⋮

Assim, para $n = t \Rightarrow$ o montante é $M = c(1 + i)^t$.

E a sequência: $(c(1 + i), c(1 + i)^2, c(1 + i)^3, \ldots, c(1 + i)^t)$ é uma progressão geométrica de razão $(1 + i)$.

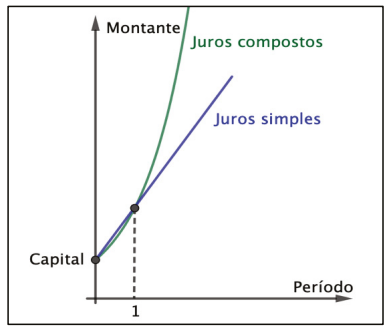
$$M = c(1 + i)^t$$

M – Montante
c – o capital
i – a taxa de juros (na forma decimal)
t – o período

Convém observar que essa fórmula calcula o montante da operação financeira, assim, para o cálculo do juros é preciso fazer a diferença entre o montante e o capital.

Veja no gráfico ao lado os dois de sistemas de juros: simples e composto. Somente no primeiro período o montante é igual, em todos os demais, o montante dos juros compostos (em P.G) é superior ao montante dos juros simples (em P.A).

Em termos de funções (que veremos nas unidades seguintes), os juros compostos representam uma função exponencial e os juros simples, uma função afim.



Taxas equivalentes: A taxa equivalente ao mês no juro composto não é igual a taxa ao ano dividido por 12, como acontece no juros simples. Como também, a taxa ao dia não é a mesma taxa ao mês dividido por 30, e assim por diante. Isso porque, no juro composto, os juros são incorporados ao capital, não havendo proporção entre as taxas.

Exemplo: Qual a taxa equivalente ao ano de uma taxa ao mês de 2%, para que gere, no juro composto, o mesmo montante sobre o mesmo capital?

Solução: $M = c(1 + i)^1 \Rightarrow$ taxa ao ano

$M = c \,.\, (1 + 2/100)^{12} \Rightarrow$ taxa ao mês capitalizado mensalmente durante um ano.

Como devem gerar o mesmo montante, temos que igualar as equações:

$\not{c} \,.\, (1 + i)^1 = \not{c} \,.\, (1 + 2/100)^{12} \Rightarrow 1 + i = (1{,}02)^{12}$ (use a calculadora!) $\Rightarrow$

$1 + i \cong 1{,}2682 \Rightarrow i \cong 0{,}2682$ (x 100) $\Rightarrow \boxed{i \cong 26{,}82\%a.a}$.

Observe que, enquanto a taxa do juro simples de 2% a.m equivale a 12x2 = 24% ao ano, a taxa do juro composto equivale a 26,82% ao ano.

De uma forma geral, para obtermos taxas equivalentes no juro composto, usamos conforme elucidado no exemplo anterior, a igualdade: $1 + i_x = (1 + i_y)^n$.

2º exemplo: Uma pessoa empresta R$ 300,00 a outra, a juros compostos de 20% a.m para um prazo de 3 meses. Qual o montante a ser pago no final do período?

Solução: $M = c \,.\, (1 + i)^t \Rightarrow M = 300 \,.\, (1 + 0{,}2)^3 \Rightarrow M = 300 \,.\, (1{,}2)^3 \Rightarrow$

$$M = 300 \,.\, 1{,}728 \Rightarrow M = 518{,}40.$$

Resposta: Montante de R$ 518,40.

3º exemplo: A poupança rende em média 0,5% a.m. Quanto um poupador terá de saldo daqui a 5 anos, se fizer hoje um único depósito R$ 100,00?

Solução: Claramente os juros são compostos, pois os juros de cada mês são incorporados ao saldo. Então,

$M = c \,.\, (1 + \mathrm{i})^t \Rightarrow M = 100.\,(1 + 0{,}005)^{60} \Rightarrow$ Obs.: 5 anos = 60 meses

$\Rightarrow M = 100.\,(1{,}005)^{60}$ (usando a calculadora!) $\Rightarrow M = 100 \,.\, 1{,}34885 \Rightarrow M = 134{,}88.$

Resposta: R$ 134,88.

4º exemplo: (UNESP-SP) Um capital de R$ 1.000,00 é aplicado durante 4 meses.

a) Encontre o rendimento da aplicação, no período, considerando a taxa de juros simples de 10% ao mês.

Solução: $j = c.i.t \Rightarrow j = 1000.0{,}1.4 \Rightarrow \boxed{j = 400}$. Resposta: R$ 400,00.

b) Determine o rendimento da aplicação, no período, considerando a taxa de juros compostos de 10% ao mês.

Solução: $M = c\,.\,(1+i)^t \Rightarrow M = 1000\,.\,(1+0{,}1)^4 \Rightarrow M = 1000\,.\,(1{,}1)^4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow M = 1000\,.\,1{,}4641 \Rightarrow M = 1464{,}10.$$

$j = M - c = 1464{,}10 - 1000 \Rightarrow \boxed{j = 464{,}10}$. Resposta: R$ 464,10.

5º exemplo: Um determinado capital foi investido a uma taxa de 9% a.m no sistema de juro composto, gerando, ao final de 5 meses, um montante de R$ 507,74. Qual o capital investido?

Solução: $M = c\,.\,(1+i)^t \Rightarrow 507{,}74 = c.\,(1+0{,}09)^5 \Rightarrow 507{,}74 = c.(1{,}09)^5$

$$507{,}74 = c.\,1{,}538624 \Rightarrow c = \frac{507{,}74}{1{,}538624} \Rightarrow \boxed{c = 330{,}00}.$$ Resposta: R$ 330,00.

6º exemplo: Qual deve ser a taxa de juros (compostos) de uma aplicação para que um capital de R$ 18.000,00 renda R$ 28.818,58 em 5 meses? Use: $\sqrt[5]{2{,}6} \cong 1{,}21$.

Solução: $M = c\,.\,(1+i)^t \Rightarrow \overbrace{18.000 + 28.818{,}58}^{M=C+j} = 18.000.\,(1+i)^5 \Rightarrow$

$$46.818{,}58 = 18.000.\,(1+i)^5 \Rightarrow (1+i)^5 = \frac{46.818{,}58}{18.000} \Rightarrow$$

$$(1+i)^5 = 2{,}60 \Rightarrow (1+i) = \sqrt[5]{2{,}6} \Rightarrow 1 + i = 1{,}21 \Rightarrow$$

$i = 1{,}21 - 1 \Rightarrow i = 0{,}21 \Rightarrow i = 21\%$. Resposta: R$ 21% a.m.

7º exemplo: (FGV/2012) Um capital de R$10.000,00, aplicado a juro composto de 1,5% ao mês, será resgatado ao final de 1 ano e 8 meses no montante, em reais, aproximadamente igual a:

a) ( )11.605,00
b) ( )12.986,00
c) ( )13.456,00
d) ( )13.895,00
e) ( )14.216,00

Dado:

x	x^{10}
0,8500	0,197
0,9850	0,860
0,9985	0,985
1,0015	1,015
1,0150	1,160
1,1500	4,045

Solução:

$M = c\,.\,(1+i)^t \Rightarrow M = 10000.\,(1+0{,}015)^{20}$ (1 ano e 8 meses = 20 meses) $\Rightarrow$

$M = 10000.\,((1{,}015)^{10})^2$ (usando a tabela)

$M = 10000.\,(1{,}16)^2 \Rightarrow M = 10000.\,1{,}3456 \Rightarrow M = 13.456{,}00$ (letra c).

EXERCÍCIOS 3.9

1)A taxa de juros compostos de uma operação financeira é de 12% ao ano. Qual a taxa dessa operação ao mês, 1%? Justifique.

2)Um capital de R$ 130.000,00 foi aplicado durante 10 meses, a uma taxa de juros compostos de 0,1% a.m. Qual o montante recebido?

3)Um banco empresta dinheiro a juro composto de 6,5% a.m. Uma pessoa efetua um empréstimo de R$ 7.700,00 para pagar em parcela única 11 meses após o empréstimo. Calcule o montante a ser pago.

4)Um determinado capital foi investido a uma taxa de 40% a.m no sistema de juro composto, gerando, ao final de 4 meses, um montante de R$ 2804,37. Qual o capital investido?

5)Qual o rendimento no primeiro ano, de um investimento de R$ 10.000,00 aplicados em um fundo cuja taxa é de 0,7% a.m? Qual a taxa equivalente desse investimento ao ano?

6)(UNIT) Um capital de R$ 20.000,00 foi aplicado a juros simples, à taxa mensal de 3,125%, e ao final de 4 meses foi sacado o montante produzido. Esse montante foi então aplicado a juros compostos por um período de 2 anos, obtendo-se ao final desse período o montante de R$ 32.400,00.A taxa anual da segunda aplicação foi de:

a) 30% b) 27,5% c) 25% d) 22,5% e)20%

7)(UNIT) Em 01 de abril de 2003, Janete abriu uma caderneta de poupança com a quantia de R$ 800,00. Nos dois meses subsequentes as taxas de rendimento da poupança foram de 1,5% e 1,4%. Se nesse período ela não fez qualquer retirada, o seu saldo no dia 01 de junho de 2003 era:

a) R$ 823,36. b)R$ 827,48 c)R$ 832,34 d)R$ 834,26. e) R$ 836,16

8)(ENEM) João deseja comprar um carro cujo preço à vista, com todos os descontos possíveis, é de R$ 21.000,00, e esse valor não será reajustado nos próximos meses. Ele tem R$ 20.000,00, que podem ser aplicados a uma taxa de juros compostos de 2% ao mês, e escolhe deixar todo o seu dinheiro aplicado até que o montante atinja o valor do carro. Para ter o carro, João deverá esperar:

a) dois meses, e terá a quantia exata.

b) três meses, e terá a quantia exata.

c) três meses, e ainda sobrarão, aproximadamente, R$ 225.

d) quatro meses, e terá a quantia exata.

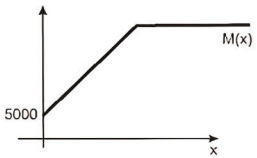
e) quatro meses, e ainda sobrarão, aproximadamente, R$ 430.

9)Uma máquina agrícola custa R$ 120.000,00 hoje, e a cada ano se desvaloriza 5%. Qual o seu valor daqui a 10 anos?

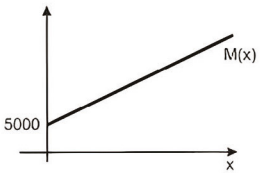
10)(ENEM) Paulo emprestou R$ 5.000,00 a um amigo, a uma taxa de juros simples de 3% ao mês. Considere x o número de meses do empréstimo e M(x) o montante a ser devolvido para Paulo no final de x meses.

Nessas condições, a representação gráfica correta para M(x) é

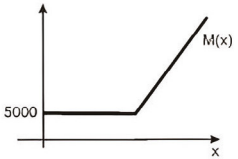
a)



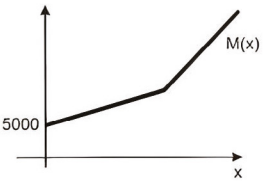
b)



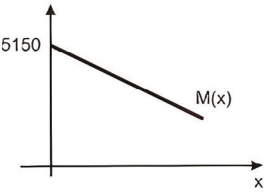
c)



d)



e)



11)A desvalorização de um bem móvel é i% ao ano. Qual o seu o valor d daqui a t anos, se hoje custa um valor c?

12)João comprou R$ 10.000,00 em insumos para sua fazenda. A compra foi à vista no cartão de crédito que cobra juros de 10% a.m. Se ele pretende sempre pagar 30% do valor da fatura todo mês, responda:

a) Em quanto tempo a dívida estará abaixo de R$ 1000,00?

b) Os valores das faturas mensais estarão em P.A ou P.G?

c) Qual a razão da sequência formada pelos valores das faturas mensais?

13)Um empresário deseja comprar uma mercadoria que custa R$ 1000,00 à vista. Ele pode utilizar o cheque especial do banco que cobra 8% a.m de juros imediatos, ou o cartão de crédito que cobra 10% de juros, após 30 dias da compra.

Qual das duas modalidades de crédito, cheque especial ou cartão de crédito ele deve usar, se a pretensão é quitar a dívida em 6 meses, pelo menor valor?

14)Um fazendeiro pretende adquirir uma máquina agrícola que custa R$ 100.000,00. Para isso, irá fazer aplicações em um fundo de investimento que rende 2% a.m. Em quanto tempo ele terá o montante suficiente para aquisição da máquina, se:

a) Investir R$ 90.000,00 uma única vez?
b) Investir R$ 10.000,00 todos os meses?

15)Uma empresa reajusta os salários dos seus empregados de acordo com as taxas de inflação. Se em três anos consecutivos, a taxa de inflação foi de 10% a.a., qual o percentual de aumento salarial dos seus empregados, nesse período?

CAPÍTULO

4

ESTATÍSTICA BÁSICA

ESTATÍSTICA BÁSICA

4. ESTATÍSTICA BÁSICA

A Estatística é a área da Matemática que estuda dados numéricos sobre fenômenos naturais, econômicos, sociais, entre outros. Indispensável em muitas ciências, ela possui métodos de análise de dados (determinísticos ou aleatórios), gráficos e outras ferramentas que auxiliam não só na análise e interpretação das informações, como também na percepção de tendências e probabilidades de ocorrer eventos, contribuindo assim para a tomada de decisões em diversas situações.

Como exemplo de sua importância e aplicação também nas ciências agrárias, temos a regressão linear, quadrática, exponencial e logarítmica, que veremos nas unidades sobre essas funções adiantes, além das medidas de tendência central e medidas de dispersão, que estão nessa unidade.

4.1. Conceitos iniciais

População: É o conjunto de dados de todas as medidas relativas ao estudo.

Exemplo: Pretende-se saber se alguma empresa de uma região possui algum tipo de acessibilidade. O conjunto de todas as informações inerentes a esse estudo, é denominado de população.

Amostra: É um subconjunto (uma parte) da população usada para obter informações.

Exemplo: Suponha que uma pesquisa pretenda descobrir a porcentagem de pessoas de uma determinada região que consome bebida alcóolica. Diante da impossibilidade de entrevistar todas as pessoas dessa região (população), faz-se então, a entrevista e análise apenas de uma parte (de uma amostra).

Censo: É o exame completo de toda população. Na prática, esse exame muitas vezes não acontece. Utilizam-se amostras bem maiores para conclusões mais confiáveis.

Exemplo: Suponha que uma pesquisa pretenda descobrir as intensões de voto para um candidato A ou B, em um pleito eleitoral. O censo, nesse caso, é inviável restando ao pesquisador a análise apenas de uma amostra da população. Quanto maior essa amostra maior será o nível de confiança da pesquisa.

Tabela: É um quadro que resume um conjunto de observações. Uma tabela compõe-se normalmente de: título, cabeçalho, corpo e fonte.

4.2. Medida de tendência central

É um parâmetro (ou valor) que melhor representa um conjunto de dados ou uma tendência, identificando um valor central dentro do conjunto. São eles: a média aritmética, média aritmética ponderada, moda e mediana.

4.2.1. Média Aritmética ($\overline{M}$)

Também denominada de **valor médio**, a **média aritmética** é valor obtido pelo quociente da soma de todos os dados por sua quantidade.

$$\overline{M} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_n}{n} \quad \text{Ou} \quad \overline{M} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} x_i}{n}$$

Por exemplo: A média aritmética dos números 5, 14 e 32 é

$$\overline{M} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{5 + 14 + 32}{3} = \frac{51}{3} \Rightarrow \boxed{\overline{M} = 17}.$$

2º exemplo: Os preços do milho por saca entre os anos é ilustrada na tabela a seguir:

Ano	R$ por saca	Alta anual	Alta acumulada
2010	R$ 21,6	-	-
2011	R$ 30,3	41%	41%
2012	R$ 29,9	-2%	39%
2013	R$ 27,1	-9%	25%
2014	R$ 27,0	0%	25%
2015	R$ 29,1	8%	35%
2016*	R$ 45,2	55%	109%

*Dados adaptados da base de dados do CEPEA/ESALQ (*preços médios apurados até meados de abr-16)*

Fonte: (FORMICONI, 2016)

Qual o preço médio por saca nesse período?

Solução:

$$\overline{M} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7}{7}$$

$$\overline{M} = \frac{21{,}6 + 30{,}3 + 29{,}9 + 27{,}1 + 27{,}0 + 29{,}1 + 45{,}2}{7} = \frac{210{,}2}{7} \Rightarrow \boxed{\overline{M} = 30{,}2}.$$

4.2.2. Média Aritmética Ponderada ($\overline{M}_p$)

É o quociente da soma dos produtos dos valores com seus respectivos pesos, pela soma dos pesos.

$$\overline{M}_p = \frac{x_1 . p_1 + x_2 . p_2 + x_3 . p_3 + x_4 . p_4 + \ldots + x_n . p_n}{p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + \cdots + p_n}$$

Por exemplo: Na avaliação de uma turma, cinco alunos tiraram nota 9, três alunos nota 5 e doze alunos nota 4. Qual a nota média da turma?

Solução: $\overline{M}_P = \frac{9.5+5.3+4.12}{5+3+12} = \frac{108}{20} \Rightarrow \boxed{\overline{M}_P = 5{,}4}$.

4.2.3. Moda (M_o)

É o valor que ocorre com maior frequência (mais vezes) num conjunto de dados.

Exemplo: Temos na tabela abaixo a idade (em anos) de 9 alunos de uma turma:

15	23	17	21	20
17	22	16	14	50

A moda é $M_o = 17$, pois é o número que ocorre com maior frequência (duas vezes).

Denominamos o conjunto de dados desse exemplo de **unimodal**, pois apresenta apenas um valor que ocorre mais vezes, isto é, uma moda.

Nos conjuntos em que há dois valores que ocorrem com maior frequência (duas modas), denominamos de **bimodal.** Quando há três valores que ocorrem com maior frequência (três modas), denominamos de **trimodal.** E nos casos em que há quatro ou mais modas, denominamos de conjunto **multimodal**. É possível ainda que em um conjunto de dados não haja valores com maior frequência. Nesse caso, denominamos de conjunto **amodal**.

4.2.4. Mediana (M_d)

É o valor que ocupa a posição central em um conjunto de dados ordenados. Quando o número de dados for par, a mediana é a média aritmética dos valores centrais, quando o número de dados for ímpar, a mediana é exatamente o número central (que está no centro dos dados ordenados).

Exemplo: Colocando as idades dos alunos do exemplo anterior, em ordem crescente, temos: 14, 15, 16, 17, 17, 20, 21, 22, 23, 50.

Uma vez que o número de dados é par (são 10), a mediana será a média aritmética dos valores centrais: 17 e 20, ou seja, $M_d = \frac{17+20}{2} = 18{,}5$.

2º exemplo: A seguir estão os indicadores dos preços CEPEA/ESALQ da saca de 60kg de café, em São Paulo. Qual a mediana dos preços?

Jul/10	302,36
Ago/10	313,93
Set/10	328,23
Out/10	327,15
Nov/10	355,51

Fonte: (CEPEA/ESALQ, 2010)

Solução: Como o número de dados é ímpar (são 5), a mediana será o valor central em ordem crescente: 302,36 ; 313,93 ; 327,15 ; 328,23 ; 355,51, ou seja, $M_d = 327{,}15$.

4.3. Medida de dispersão

As medidas de dispersão na estatística medem o grau de variabilidade (ou dispersão) dos dados em relação à média, isto é, indicam o quão próximos ou afastados estão os dados em relação à média do conjunto.

Por exemplo: Em um trabalho de pesquisa de modelagem matemática no cultivo do alface, foram coletadas as seguintes medidas do diâmetro da cabeça de dois canteiros com doses diferentes de nitrogênio, cujas amostras estão a seguir.

Canteiro A	1,7 cm	7,2 cm	4,2 cm	3,1 cm
Canteiro B	4,0 cm	4,2 cm	3,9 cm	4,1 cm

Veja que em ambos os canteiros a média aritmética é igual a 4,05 cm. O que pressupõe, analisando apenas essa média como parâmetro, que uma possível tomada de decisão em ambos os canteiros deve ser a mesma. Porém, se o parâmetro técnico for a regularidade (ou homogeneidade) dos tamanhos dos diâmetros da cabeça, a amostra coletada do canteiro B é mais regular que o canteiro A, e provavelmente, decisões diferentes devem ser tomadas em cada canteiro.

A seguir veremos os parâmetros que medem essa regularidade ou de forma contrária, a dispersão dos dados em relação a média aritmética.

4.3.1. Desvio Médio (D_m)

É a média aritmética do módulo dos desvios[5].

$$D_m = \frac{|x_1 - \overline{M}| + |x_2 - \overline{M}| + |x_3 - \overline{M}| + \ldots + |x_n - \overline{M}|}{n}$$

No exemplo anterior, temos para o canteiro A:

$$D_m = \frac{|x_1 - \overline{M}| + |x_2 - \overline{M}| + |x_3 - \overline{M}| + \ldots + |x_n - \overline{M}|}{n}$$

[5] Denominamos de desvio, a diferença entre um dado e a média aritmética do conjunto.

$$D_m = \frac{|1,7 - 4,05| + |7,2 - 4,05| + |4,2 - 4,05| + |3,1 - 4,05|}{4}$$

$$D_m = \frac{|-2,35| + |3,15| + |0,15| + |-0,95|}{4}$$

$$D_m = \frac{2,35 + 3,15 + 0,15 + 0,95}{4} = \frac{6,6}{4} = 1,65.$$

O módulo de um número, também chamado de valor absoluto, é o seu valor sem o sinal. Ver definição 17.2.1.

Para o canteiro B:

$$D_m = \frac{|4 - 4,05| + |4,2 - 4,05| + |3,9 - 4,05| + |4,1 - 4,05|}{4}$$

$$D_m = \frac{|-0,05| + |0,15| + |-0,15| + |0,05|}{4}$$

$$D_m = \frac{0,05 + 0,15 + 0,15 + 0,05}{4} = \frac{0,4}{4} = 0,1.$$

Comparando os dois desvios médios, vemos que o desvio médio calculado para o canteiro B, está mais próximo de zero. O que indica que de fato, os dados estão mais próximos da média aritmética (mais regulares) ou se preferir, os dados estão menos dispersos em relação a média aritmética.

4.3.2. Variância (V)

É um parâmetro que também serve para expressar o quanto um conjunto de dados se aproxima ou desvia da média aritmética. Porém, o seu valor é dado pela média aritmética dos quadrados dos desvios.

$$V = \frac{(x_1 - \overline{M})^2 + (x_2 - \overline{M})^2 + (x_3 - \overline{M})^2 + \cdots (x_n - \overline{M})^2}{n}$$

4.3.3. Desvio Padrão (D_p)

É a raiz quadrada da variância.

$$D_p = \sqrt{\mathrm{V}}$$

Vamos calcular a variância e em seguida o desvio padrão do exemplo anterior.

- Para o canteiro A,

$$\mathrm{V} = \frac{(x_1 - \overline{M})^2 + (x_2 - \overline{M})^2 + (x_3 - \overline{M})^2 + \ldots + (x_n - \overline{M})^2}{n}$$

$$\mathrm{V} = \frac{(1,7 - 4,05)^2 + (7,2 - 4,05)^2 + (4,2 - 4,05)^2 + (3,1 - 4,05)^2}{4}$$

$$V = \frac{(-2{,}35)^2 + (3{,}15)^2 + (0{,}15)^2 + (-0{,}95)^2}{4}$$

$$V = \frac{5{,}52 + 9{,}92 + 0{,}02 + 0{,}9}{4} = \frac{16{,}36}{4} \Rightarrow \boxed{V = 4{,}09}.$$

$$D_p = \sqrt{V} \Rightarrow D_p = \sqrt{4{,}09} \Rightarrow \boxed{D_p = 2{,}02}.$$

- Para o canteiro B,

$$V = \frac{(x_1 - \overline{M})^2 + (x_2 - \overline{M})^2 + (x_3 - \overline{M})^2 + \ldots + (x_n - \overline{M})^2}{n}$$

$$V = \frac{(4 - 4{,}05)^2 + (4{,}2 - 4{,}05)^2 + (3{,}9 - 4{,}05)^2 + (3{,}1 - 4{,}1)^2}{4}$$

$$V = \frac{(-0{,}05)^2 + (0{,}15)^2 + (-0{,}15)^2 + (-1)^2}{4}$$

$$V = \frac{1{,}0475}{4} \Rightarrow \boxed{V \cong 0{,}262}$$

$$D_p = \sqrt{V} \Rightarrow D_p = \sqrt{0{,}262} \Rightarrow \boxed{D_p = 0{,}51}.$$

Assim como acontece com o desvio o médio, quanto mais próximo de zero for o desvio padrão, mais regular serão os dados.

2º exemplo: A seguir estão os preços médios mensais do sorgo granífero em 1998, no estado de São Paulo.

Ano\Preço	jan	fev	mar	abr	maio
1998	6,30	5,74	5,36	5,25	5,74

Fonte: (TSUNECHIRO e MARTINS, 2003)

Calcule o desvio padrão desses valores.

Solução:

$$\overline{M} = \frac{6{,}30 + 5{,}74 + 5{,}36 + 5{,}25 + 5{,}74}{5} = \frac{28{,}39}{5} \cong \mathbf{5{,}68}.$$

$$V = \frac{(x_1 - \overline{M})^2 + (x_2 - \overline{M})^2 + (x_3 - \overline{M})^2 + \ldots + (x_n - \overline{M})^2}{n}$$

$$V = \frac{(6{,}3 - 5{,}68)^2 + (5{,}74 - 5{,}68)^2 + (5{,}25 - 5{,}68)^2 + (5{,}25 - 5{,}68)^2 + (5{,}74 - 5{,}68)^2}{5}$$

$$V = \frac{(-0{,}62)^2 + (0{,}06)^2 + (-0{,}32)^2 + (-0{,}43)^2 + (0{,}06)^2}{5}$$

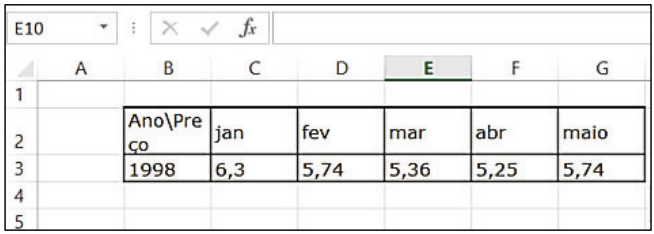
$$V = \frac{0{,}3844 + 0{,}0036 + 0{,}1024 + 0{,}1849 + 0{,}0036}{5}$$

$$V = \frac{0{,}6789}{5} \Rightarrow \boxed{V \cong 0{,}136}.$$

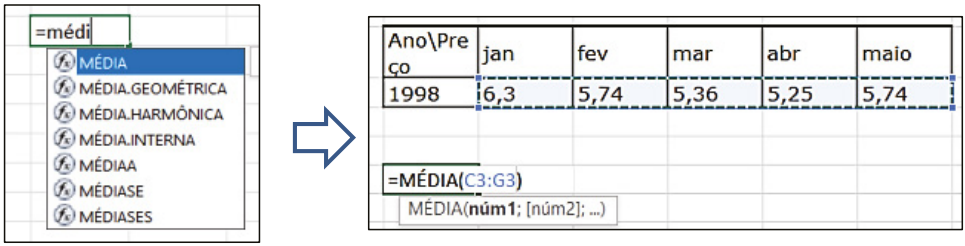
$$D_p = \sqrt{V} \Rightarrow D_p = \sqrt{0{,}136} \Rightarrow \boxed{D_p = 0{,}37}.$$

4.4. Cálculo de medidas de tendência central e dispersão usando planilha eletrônica

Como demonstração iremos utilizar o Microsoft Excel 2013. Em uma planilha em branco qualquer digite os valores da tabela. Como exemplo, vamos utilizar os dados do exemplo anterior.

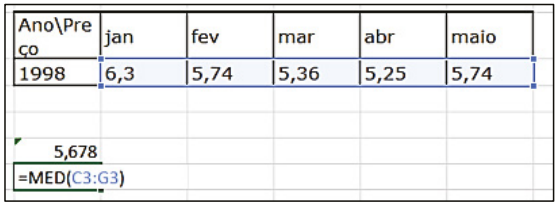


Na célula escolhida digite "=média" e selecione os dados:



O resultado da média será apresentado, após o ENTER.

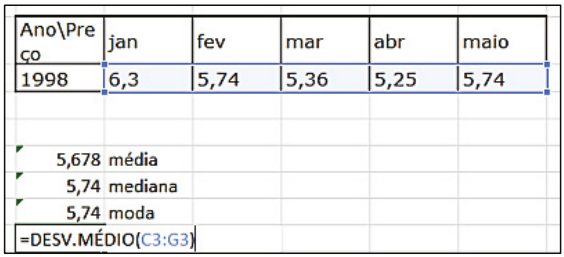
Para o cálculo da mediana. Digite na célula escolhida "=MED" e em seguida, selecione os dados.



O resultado da mediana será apresentado, após o ENTER.

Da mesma forma, digite "=MODO.ÚNICO" na célula escolhida e em seguida selecione os dados. Após o ENTER, o software mostrará o valor da moda.

Para calcular o desvio médio, Digite na célula pretendida "=DESV.MÉDIO" e selecione o intervalo. Após o ENTER, o software mostrará o valor do desvio médio.



Ano\Preço	jan	fev	mar	abr	maio
1998	6,3	5,74	5,36	5,25	5,74

5,678	média
5,74	mediana
5,74	moda

=DESV.MÉDIO(C3:G3)

Quanto a variância, digite "=VARPA", selecione os dados e tecle ENTER.

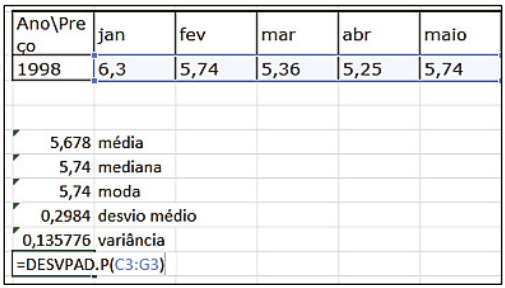


Ano\Preço	jan	fev	mar	abr	maio
1998	6,3	5,74	5,36	5,25	5,74

5,678	média
5,74	mediana
5,74	moda
0,2984	desvio médio

=VARPA(C3:G3)

Para o desvio padrão, digite: "=DESVPAD.P", selecione o intervalo e tecle ENTER.



Ano\Preço	jan	fev	mar	abr	maio
1998	6,3	5,74	5,36	5,25	5,74

5,678	média
5,74	mediana
5,74	moda
0,2984	desvio médio
0,135776	variância

=DESVPAD.P(C3:G3)

Os resultados serão esses na planilha:



5,678	média
5,74	mediana
5,74	moda
0,2984	desvio médio
0,135776	variância
0,368478	desvio padrão

4.5. Cálculo de média aritmética, desvio padrão e variância usando calculadora científica

1º - Inicialmente, zere a memória e as configurações da calculadora tecle:



2º - Tecle:  (corresponde a estatística).

3º - Digite os números usando ponto no lugar de vírgula, exemplo do primeiro número (6,3) e tecle em M+.

 Aparecerá n = 1 na tela;

4º- Quando digitar o segundo número e teclar em M+ aparecerá n = 2 na tela e assim sucessivamente. Continua o processo até o último número.

5º - Ao término da inclusão dos números (após o M+ do último número), tecle:

 aparecerá as opções da figura 4.5.1;

6º - Para calcular a média aritmética, tecle:  (e o visor mostrará a média: 5,678 – figura 4.5.2);

8º - Para voltar as opções, tecle  e a calculadora voltará para a tela da figura 4.5.1;

9º - Tecle  para o desvio padrão e a calculadora mostrará o valor que está na figura 4.5.3.

Para calcular a variância, tecle  (para elevar ao quadrado).



Figura 4.5.1



Figura 4.5.2



Figura 4.5.3

EXERCÍCIOS 4.1

1)Calcule a média, a moda, a mediana e os desvios (médio, variância e padrão) dos seguintes valores:

a)

58	62	83	55	61	80	58	70	71	77

b)

5	3	-2	1	0	-3	2	1	5

c)

100	150	320	380	120	100	150	130	100	350

d)

50,5	30,2	49,5	35,7	45,4	33,4	49,4	45,4	35,7	30,2	49,4	49,5

2) (ENEM)Na tabela, são apresentados dados da cotação mensal do ovo extra branco vendido no atacado, em Brasília, em reais, por caixa de 30 dúzias de ovos, em alguns meses dos anos 2007 e 2008.

Mês	**Cotação**	**Ano**
Outubro	R$ 83,00	2007
Novembro	R$ 73,10	2007
Dezembro	R$ 81,60	2007
Janeiro	R$ 82,00	2008
Fevereiro	R$ 85,30	2008
Março	R$ 84,00	2008
Abril	R$ 84,60	2008

De acordo com esses dados, o valor da mediana das cotações mensais do ovo extra branco nesse período era igual a

a) R$ 73,10.
b) R$ 81,50.
c) R$ 82,00.
d) R$ 83,00.
e) R$ 85,30.

3)A Tabela a seguir apresenta os preços médios anuais da soja, em valores nominais, segundo indicador Cepea/Esalq (base Paranaguá-PR) e a respectiva variação anual e acumulada de preços, de 2007 a parcial de 2018 (até 22 de maio).

Calcule a média, a moda, a mediana e os desvios (médio, variância e padrão) dos preços da saca da soja no período entre 2007 e 2018.

Ano	Soja		
	R$ / sc.	Var. ano	Var. acum.
2007	R$ 37,2	-	-
2008	R$ 48,5	30,4%	30,4%
2009	R$ 47,9	-1,3%	28,7%
2010	R$ 42,2	-11,8%	13,5%
2011	R$ 49,0	16,1%	31,9%
2012	R$ 69,1	41,0%	86,0%
2013	R$ 69,0	-0,2%	85,6%
2014	R$ 67,2	-2,5%	80,9%
2015	R$ 72,6	8,0%	95,4%
2016	R$ 81,4	12,0%	118,9%
2017	R$ 71,3	-12,4%	91,8%
2018	R$ 79,5	11,5%	113,8%
2018: preços parciais até 22-mai			

Fonte: (FORMICONI, 2018)

4)(ENEM) Uma equipe de especialistas do centro meteorológico de uma cidade mediu a temperatura do ambiente, sempre no mesmo horário, durante 15 dias intercalados, a partir do primeiro dia de um mês. Esse tipo de procedimento é frequente, uma vez que os dados coletados servem de referência para estudos e verificação de tendências climáticas ao longo dos meses e anos. As medições ocorridas nesse período estão indicadas no quadro:

Em relação à temperatura, os valores da média, mediana e moda são, respectivamente, iguais a

a) 17°C, 17°C e 13,5°C.
b) 17°C, 18°C e 13,5°C.
c) 17°C, 13,5°C e 18°C.
d) 17°C, 18°C e 21,5°C.
e) 17°C, 13,5°C e 21,5°C.

Dia do mês	Temperatura (em °C)
1	15,5
3	14
5	13,5
7	18
9	19,5
11	20
13	13,5
15	13,5
17	18
19	20
21	18,5
23	13,5
25	21,5
27	20
29	16

5)(FGV) A tabela abaixo representa a distribuição de frequência dos salários de um grupo de 50 empregados de uma empresa, em certo mês. O salário médio desses empregados, nesse mês, foi de:

a) R$ 2 637,00
b) R$ 2 520,00
c) R$ 2 500,00
d) R$ 2 420,00
e) R$ 2 400,00

Número da classe	Salário do mês – R$	Número de empregados
1	1 000 → 2 000	20
2	2 000 → 3 000	18
3	3 000 → 4 000	9
4	4 000 → 5 000	3

6)(FGV) Sejam os números 7, 8, 3, 5, 9 e 5 seis números de uma lista de nove números inteiros. O maior valor possível para a mediana dos nove números da lista é

a) 5
b) 6
c) 7
d) 8
e) 9

7)Um projeto de pesquisa sobre agricultura familiar, revelou uma amostra de 30 agricultores de uma região e as respectivas quantidade de filhos:

Nº de agricultores	2	5	1	2	8	10	2
Quantidade de filhos	7	5	8	4	3	2	1

Calcule a média, a moda, a mediana e os desvios médio e padrão da quantidade de filhos dessa amostra.

8)Ao calcular o salário médio bruto de seus 19 funcionários, um empresário não sabia da existência de um funcionário novato, e erroneamente calculou a média de R$ 1400,00. Se o salário médio correto dos 20 funcionários é R$ 1450,00, qual é o valor do salário do funcionário novato?

9)Comparando dois conjuntos de dados, aquele que apresenta maior homogeneidade nas informações, é o conjunto que obrigatoriamente:

a) Apresenta média aritmética maior;
b) Apresenta média aritmética menor;
c) Apresenta desvio padrão menor;
d) Apresenta desvio médio maior;
e) Apresenta variância maior.

4.6. Análise de gráficos

Os gráficos servem para transmitir as informações de forma clara e objetiva de certa pesquisa ou de dados estatísticos. Normalmente essas informações estão relacionadas a fenômenos da nossa sociedade ou situações do nosso dia a dia. Os principais elementos de um gráfico são:

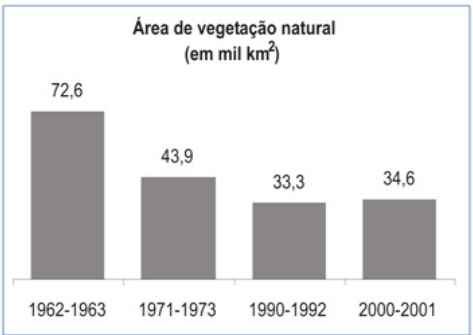
● **Título**: geralmente é uma frase curta e chamativa, com o objetivo de chamar a atenção do leitor.

● **Subtítulo ou texto explicativo ou legenda:** indispensável para a compreensão do gráfico, aborda o conteúdo ou assunto, quais as unidades de medida adotadas, quando e aonde foi feita a pesquisa.

● **Fonte**: identifica o órgão ou instituição que fez a pesquisa de dados. A fonte valida a pesquisa e permite que o leitor confie nas informações.

Os tipos gráficos mais utilizados estão nos exemplos a seguir.

1º exemplo (gráfico de colunas): (ENEM) Em um estudo feito pelo Instituto Florestal, foi possível acompanhar a evolução de ecossistemas paulistas desde 1962. Desse estudo publicou-se o Inventário Florestal de São Paulo, que mostrou resultados de décadas de transformações da Mata Atlântica.



(Fonte: Pesuisa.91, São Paulo: FAPESP, set/2003. p.48.

Examinando o gráfico da área de vegetação natural remanescente (em mil km²) pode-se inferir que

a) a Mata Atlântica teve sua área devastada em 50% entre 1963 e 1973.

No gráfico não há dados sobre esse período. Observe que há intervalos somente de 1962-1963 e 1971-1973.

b) a vegetação natural da Mata Atlântica aumentou antes da década de 60, mas reduziu nas décadas posteriores.

No gráfico não há dados sobre esse período, observe que o menor valor do gráfico é o intervalo 1962-1963, então não podemos afirmar nada sobre intervalos anteriores.

c) a devastação da Mata Atlântica remanescente vem sendo contida desde a década de 60.

Não houve contenção, os valores são decrescentes em relação ao valor inicial: 72,6 ⇒ 43,9 ⇒ 33,3 ⇒ 34,6.

d) em 2000-2001, a área de Mata Atlântica preservada em relação ao período de 1990-1992 foi de 34,6%.

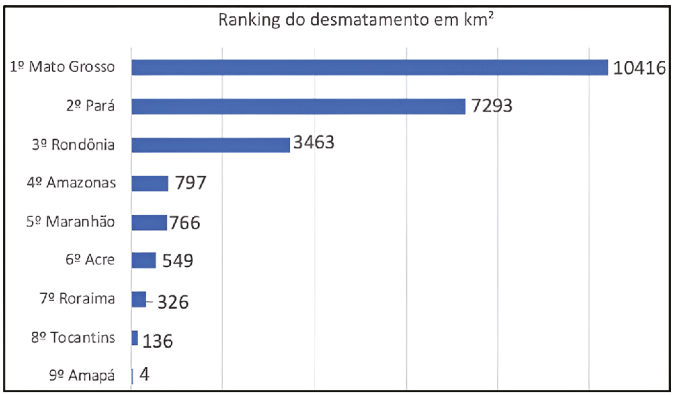
Errado, o valor correto é $\frac{34,5}{33,3} = 1,03 \Rightarrow 1,03 - 1 = 0,03 \Rightarrow 3\%$.

e)a área preservada da Mata Atlântica nos anos 2000 e 2001 é maior do que a registrada no período de 1990-1992.

Resposta certa. Em 2000-2001 foi de 34,6 e 1990-1992 foi de 33,3.

2º exemplo (gráfico de barras): (ENEM) Em sete de abril de 2004, um jornal publicou o ranking de desmatamento, conforme o gráfico, da chamada Amazônia Legal, integrada por nove estados. Considerando-se que até 2009 o desmatamento cresceu 10,5% em relação aos dados de 2004, o desmatamento médio por estado em 2009 está entre:

a) 100km² e 900km²
b) 1000km² e 2700km²
c) 2800km² e 3200 km²
d) 3300km² e 4000km²
e) 4100km² e 5800km²



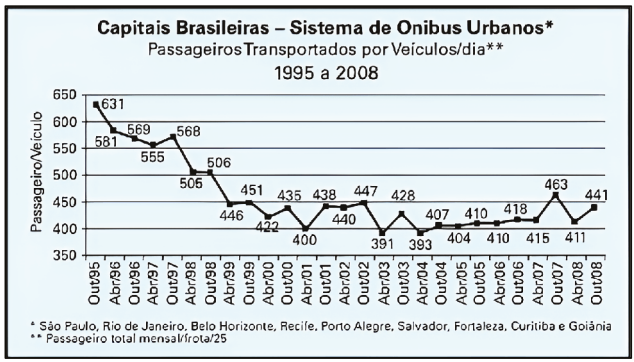
Solução: O desmatamento médio por estado em 2004 era

$$\frac{10416 + 7293 + 3463 + 797 + 766 + 549 + 326 + 136 + 4}{9} = 2638,90.$$

Com o aumento de 10,5%, temos: $2638,9 \cdot 1,105 = 2916,0$ km² (letra c).

3º exemplo (gráfico de linhas): (ENEM) Dados da Associação Nacional de Empresas de Transportes Urbanos (ANTU) mostram que o número de passageiros transportados mensalmente nas principais regiões metropolitanas do país vem

caindo sistematicamente. Eram 476,7 milhões de passageiros em 1995, e esse número caiu para 321,9 milhões em abril de 2001. Nesse período, o tamanho da frota de veículos mudou pouco, tendo no final de 2008 praticamente o mesmo tamanho que tinha em 2001. O gráfico a seguir mostra um índice de produtividade utilizado pelas empresas do setor, que é a razão entre o total de passageiros transportados por dia e o tamanho da frota de veículos.



Supondo que as frotas totais de veículos naquelas regiões metropolitanas em abril de 2001 e em outubro de 2008 eram do mesmo tamanho, os dados do gráfico permitem inferir que o total de passageiros transportados no mês de outubro de 2008 foi aproximadamente igual a

a) 355 milhões
b) 400 milhões
c) 426 milhões
d) 441 milhões
e) 477 milhões

Solução: Como a razão entre o total de passageiros e o tamanho da frota são aproximadamente iguais nos meses de abr/01 e out/08, temos

$$\frac{321{,}9\ milhões}{tamanho\ da\ frota\ em\ abri/01} = 400.$$

$$\frac{y}{tamanho\ da\ frota\ em\ out/08} = 441.$$

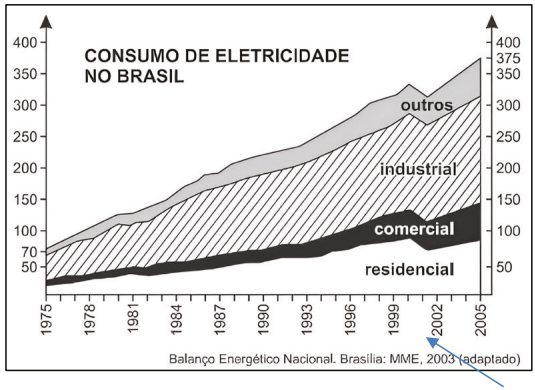
Segundo o texto, o tamanho da frota em abr/01 é praticamente igual ao tamanho da frota em out/08, desta forma

$$\frac{y}{\frac{321{,}9}{400}} \cong 441 \Rightarrow y \cong \frac{441}{400}.321{,}9 \cong 355 \text{ milhões(letra a).}$$

4º exemplo (gráfico de áreas): (ENEM) A racionalização do uso da eletricidade faz parte dos programas oficiais do governo brasileiro desde 1980. No entanto, houve um período crítico, conhecido como "apagão", que exigiu mudanças de hábitos da população brasileira e resultou na maior, mais rápida e significativa

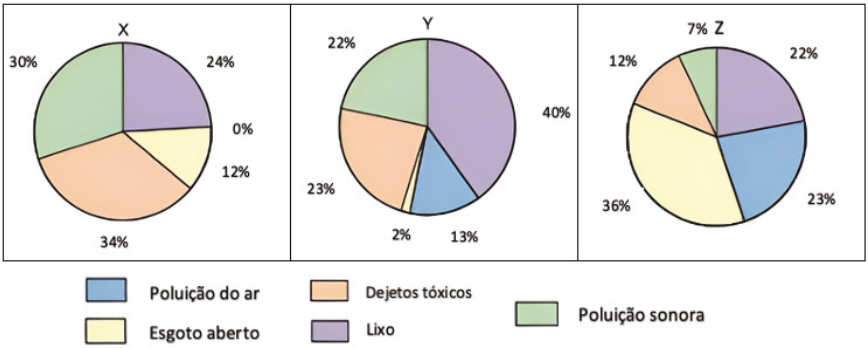
economia de energia. De acordo com o gráfico, conclui-se que o "apagão" ocorreu no biênio

a) 1998-1999.
b) 1999-2000.
c) 2000-2001.
d) 2001-2002.
e) 2002-2003.



Solução: Percebe-se apenas um decréscimo no gráfico que está no intervalo 2000-2001 (letra c).

5º exemplo (gráfico de pizza): (ENEM) Moradores de três cidades, aqui chamadas de X, Y e Z, foram indagados quanto aos tipos de poluição que mais afligiam as suas áreas urbanas. Nos gráficos abaixo estão representadas as porcentagens de reclamações sobre cada tipo de poluição ambiental.



Considerando a queixa principal dos cidadãos de cada cidade, a primeira medida de combate à poluição em cada uma delas seria, respectivamente:

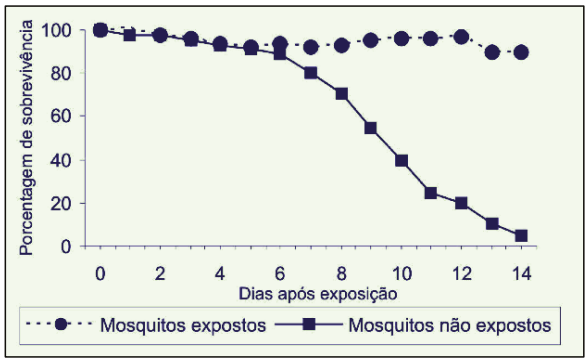
	X	Y	Z
(A)	Manejamento de lixo	Esgotamento sanitário	Controle de emissão de gases
(B)	Controle de despejo industrial	Manejamento de lixo	Controle de emissão de gases
(C)	Manejamento de lixo	Esgotamento sanitário	Controle de despejo industrial
(D)	Controle de emissão de gases	Controle de despejo industrial	Esgotamento sanitário
(E)	Controle de despejo industrial	Manejamento de lixo	Esgotamento sanitário

Solução: No gráfico X, a porcentagem maior (34%), segundo a legenda, refere-se aos dejetos tóxicos. No gráfico Y, a porcentagem maior (40%) refere-se ao lixo. E no gráfico Z, a porcentagem maior (36%) refere-se ao esgoto aberto. Dessa forma, a resposta certa é sinonimamente, a letra E.

EXERCÍCIOS 4.2

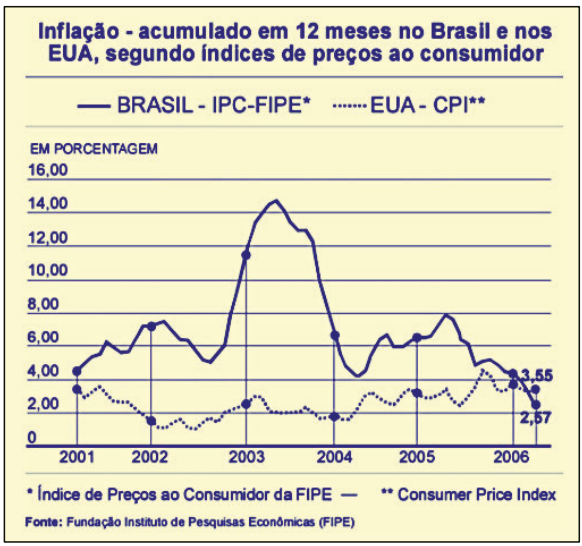
1)(ENEM) Foram publicados recentemente trabalhos relatando o uso de fungos como controle biológico de mosquitos transmissores da malária. Observou-se o percentual de sobrevivência dos mosquitos *Anopheles*sp após exposição ou não a superfícies cobertas com fungos sabidamente pesticidas, ao longo de duas semanas. Os dados obtidos estão presentes no gráfico ao lado. No grupo exposto aos fungos, o período em que houve 50% de sobrevivência ocorreu entre os dias

a) 2 e 4.
b) 4 e 6.
c) 6 e 8.
d) 8 e 10.
e) 10 e 12.



2)(ENEM) O gráfico abaixo foi extraído de matéria publicada no caderno Economia & Negócios do jornal O Estado de S. Paulo, em 11/6/2006. É um titulo adequado para a matéria jornalística em que esse gráfico foi apresentado:

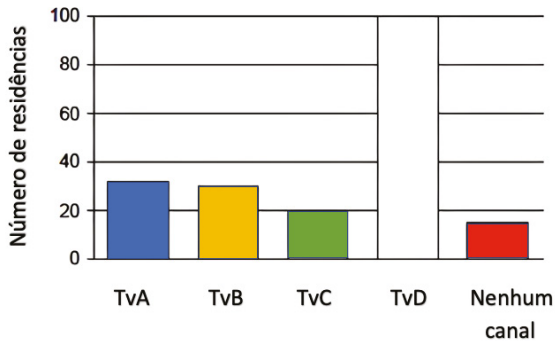
a) Brasil: inflação acumulada em 12 meses menor que a dos EUA.
b) Inflação do terceiro mundo supera pela sétima vez a do primeiro mundo.
c) Inflação brasileira estável no período de 2001 a 2006.
d) Queda no índice de preços ao consumidor no período 2001-2005.
e) EUA: ataques terroristas causam hiperinflação.



3)(ENEM) Uma pesquisa de opinião foi realizada para avaliar os níveis de audiência de alguns canais de televisão, entre 20h e 21h, durante uma determinada noite. Os resultados obtidos estão representados no gráfico de barras ao lado:

O número de residências atingidas nessa pesquisa foi aproximadamente de:

a)100
b)135
c)150
d)200
e)220



4)A percentagem de entrevistados que declararam estar assistindo à TvB, na questão anterior, é aproximadamente igual a:

a) 15% b)20% c)22% d)27% e)30%

5)(ENEM) O gráfico abaixo mostra a área desmatada da Amazônia, em km², a cada ano, no período de 1988 a 2008.

As informações do gráfico indicam que

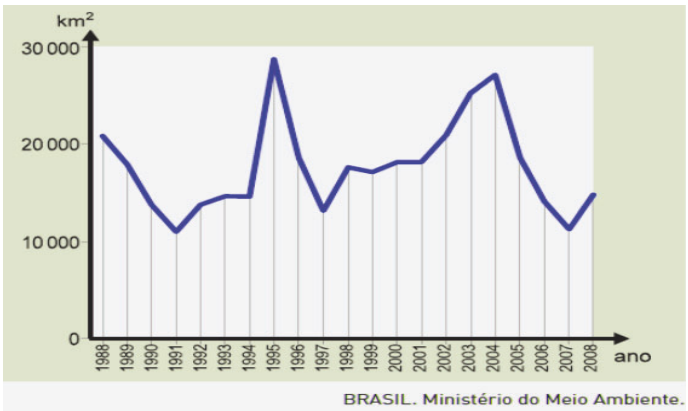
a)o maior desmatamento ocorreu em 2004.

b)a área desmatada foi menor em 1997 que em 2007.

c)a área desmatada a cada ano manteve-se constante entre 1998 e 2001.

d)a área desmatada por ano foi maior entre 1994 e 1995 que entre 1997 e 1998.

e)o total de área desmatada em 1992, 1993 e 1994 é maior que 60.000 km².

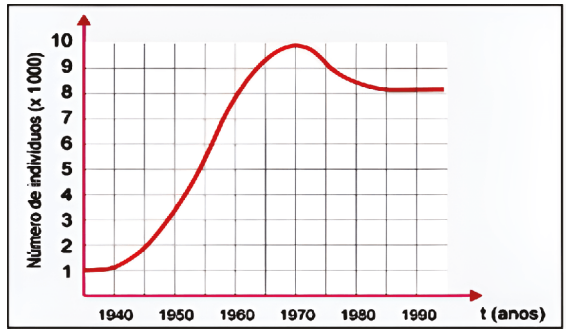


BRASIL. Ministério do Meio Ambiente.

6)(ENEM) O número de indivíduos de certa população é representado pelo gráfico abaixo.

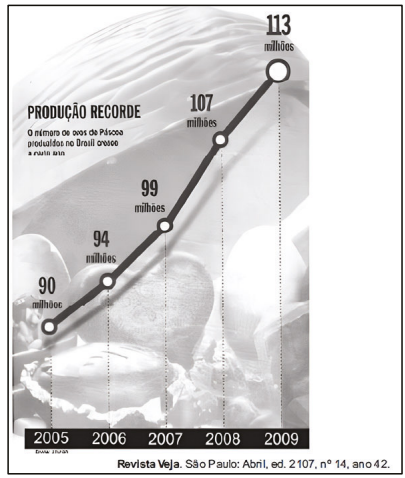
Em 1975, a população tinha um tamanho aproximadamente igual ao de:

a) 1960
b) 1963
c) 1967
d) 1970
e) 1980



7)(ENEM) Para conseguir chegar a um número recorde de produção de ovos de Páscoa, as empresas brasileiras começam a se planejar para esse período com um ano de antecedência. O gráfico a seguir mostra o número de ovos de Páscoa produzidos no Brasil no período de 2005 a 2009. De acordo com o gráfico, o biênio que apresentou maior produção acumulada foi

a) 2004-2005.
b) 2005-2006.
c) 2006-2007.
d) 2007-2008.
e) 2008-2009.

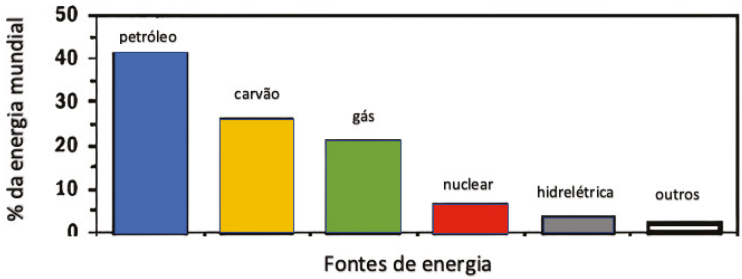


Revista Veja. São Paulo: Abril, ed. 2107, nº 14, ano 42.

8)(ENEM) Segundo um especialista em petróleo (Estado de S. Paulo, 5 de março de 2000), o consumo total de energia mundial foi estimado em 8,3 bilhões de toneladas equivalentes de petróleo (tep) para 2001. A porcentagem das diversas fontes da energia consumida no globo é representada no gráfico.

Segundo as informações apresentadas, para substituir a energia nuclear utilizada é necessário, por exemplo, aumentar a energia proveniente do gás natural em cerca de

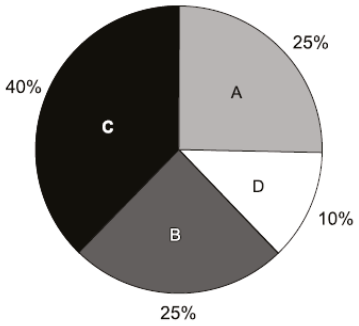
a) 10%.
b) 18%.
c) 25%.
d) 33%.
e) 50%.



9)(ENEM) Foi realizado um levantamento nos 200 hotéis de uma cidade, no qual foram anotados os valores, em reais, das diárias para um quarto padrão de casal e a quantidade de hotéis para cada valor da diária. Os valores das diárias foram: A = R$ 200,00; B = R$ 300,00; C = R$ 400,00 e D = R$ 600,00. No gráfico, as áreas representam as quantidades de hotéis pesquisados, em porcentagem, para cada valor da diária.

O valor mediano da diária, em reais, para o quarto padrão de casal nessa cidade, é

a) 300,00.
b) 345,00.
c) 350,00.
d) 375,00.
e) 400,00.



CAPÍTULO

5

NOÇÕES DE FUNÇÃO

NOÇÕES DE FUNÇÃO

5. NOÇÕES DE FUNÇÃO

Para entender o significado de função, vamos analisar duas tabelas que representam a relação entre duas grandezas.

Tabela 5.1: Mostra os preços da polpa do açaí de acordo com a quantidade de litros.

Tabela 5.2: Mostra a quantidade de arame necessária para cercar, com quatros voltas, um terreno retangular de acordo com a sua área.

Litros	Preço (R$)
1	8,00
1,5	12,00
3	24,00
5	40,00

Tabela 5.1

Arame (m)	Área (m²)
800	2.500
1600	10.000
2400	22.500
4800	80.000

Tabela 5.2

Observe que há uma "dependência" entre o preço e a quantidade de litros da polpa de açaí, assim como, entre a quantidade de arame e a área do terreno, e a essa "dependência" denominamos de **relação**. O mesmo acontece em outras situações do dia-a-dia, ao comprar um produto numa loja com desconto, por exemplo, o valor a ser pago depende do valor do desconto e da forma de pagamento, o preço de um terreno depende de suas dimensões e localização, o crescimento de uma planta, depende, dentre outros fatores, dos nutrientes, e assim por diante. Essa "dependência" ou **relação** entre grandezas pode constituir ou não uma função. É o que veremos adiante.

5.1. Definição de função

Definição 5.1.1: Sejam dados os conjuntos A e B não vazios, a relação f de A em B é uma **função** quando a cada elemento x do conjunto A está associado um único elemento y do conjunto B.

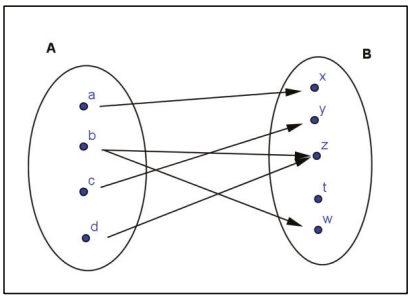
Quando uma relação é uma função, usamos a notação $f: A \to B$ ou $A \xrightarrow{f} B$ (lê-se: função f de A em B).

A definição de função pode ser visualizada de forma mais concreta através de diagrama de flechas. Esse diagrama consiste em representar os conjuntos A e B lado a lado, ligando seus elementos por meio de flechas de acordo com a relação proposta. Através dessa representação e adaptando a definição 5.1.1, dizemos que uma relação representada por diagrama de flechas **é uma função** $f: A \to B$ quando:

"Todos os elementos do conjunto A, sem exceção, parte uma, e somente uma, flecha."

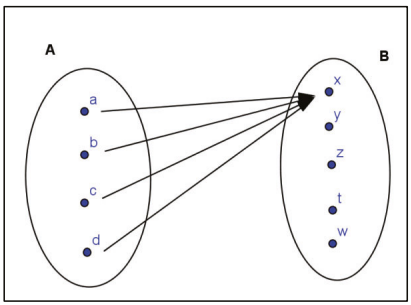
Exemplo: Vamos verificar quais das relações R de A em B abaixo, representam uma função.

a)



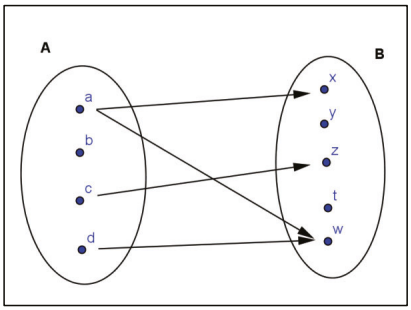
Não é uma função. Motivo: há duas flechas partindo do elemento b do conjunto A.

b)



É uma função, pois em todos os elementos de A parte uma e somente uma flecha.

c)



Não é uma função por dois motivos. Primeiro, há duas flechas partindo do elemento a do conjunto A, segundo, o elemento b não possui flechas

2º exemplo: Vamos analisar as duas situações propostas no início da unidade (ver tabelas 5.1 e 5.2).

A relação R: litros de açaí → preço **pode ser uma função**. Pois, não é fácil imaginar uma quantidade de litros da polpa de açaí sem preço (elementos do conjunto A sem

flecha), ou ainda, uma quantidade de litros da polpa com dois preços diferentes (partindo duas flechas do conjunto A).

Já a relação R: quantidade de arames → área **pode não ser uma função**. Pois, é perfeitamente possível ter dois terrenos retangulares de mesmo perímetro ou quantidade de arames (exemplo: 50mx50m e 60mx40m), porém com áreas diferentes. Nesse caso, teremos mais de uma flecha partindo em um mesmo elemento de A, não configurando portanto, uma função.

Quando temos uma função f: A→B denominamos o conjunto A de **domínio**, o conjunto B de **contradomínio** e os elementos y de B associado aos elementos x de A, de **imagem**, usando a seguinte notação:

D(f): lê-se domínio da função f.

CD(f): lê-se contradomínio da função f.

Im(f): lê-se imagem da função f.

Diante da definição de conjunto imagem, temos: Im(f)⊂ CD(f).

Exemplo: Dados A = $\{-3,0,1,4,9\}$ e B = $\{-3, 3, 5, 11, 20, 21, 25\}$, determine o domínio, contradomínio e o conjunto imagem de f: A→B, definida por $y = 2x + 3$, caso seja uma função.

Solução: Usando os elementos de $A = \{-3, 0, 1, 4, 9\}$ em $y = 2x + 3$, temos

$y = 2x + 3 \Rightarrow y = 2.(-3) + 3 \Rightarrow y = -3.$

(Liga uma flecha do elemento -3 de A ao elemento -3 de B);

$y = 2x + 3 \Rightarrow y = 2.0 + 3 \Rightarrow y = 3.$

(Liga uma flecha do elemento 0 de A ao elemento 3 de B);

$y = 2x + 3 \Rightarrow y = 2.1 + 3 \Rightarrow y = 5$ (liga o elemento 1 de A ao elemento 5 de B);

$y = 2x + 3 \Rightarrow y = 2.4 + 3 \Rightarrow y = 11$ (liga o elemento 4 de A ao elemento 11 de B);

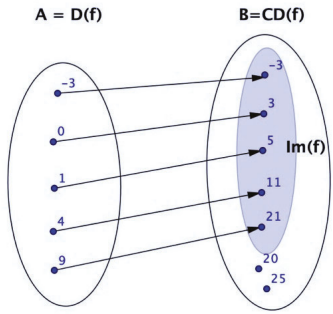
$y = 2x + 3 \Rightarrow y = 2.9 + 3 \Rightarrow y = 21$ (liga o elemento 9 de A ao elemento 21 de B).

Diagrama de flechas:

$D(f) = \{-3, 0, 1, 4, 9\}$.

$CD(f) = \{-3, 3, 5, 11, 21, 20, 25\}$.

$Im(f) = \{-3, 3, 5, 11, 21\}$.



Veja que: Im(f)⊂ CD(f).

2º exemplo: Dados A =$\{-1, 1, 2\}$ e B = $\{0, 2, 4\}$, vamos verificar se a relação $R: A \to B$, definida por $y = x + 1$ é uma função.

Solução: Usando os elementos de A em $y = x + 1$, dispomos de

$y = x + 1 \Rightarrow y = -1 + 1 \Rightarrow y = 0$ (liga o elemento -1 de A ao elemento 0 de B);

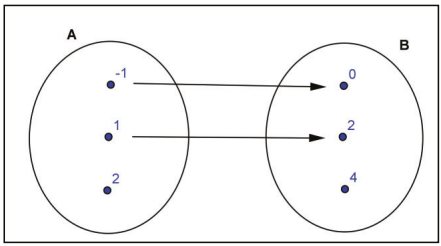
$y = x + 1 \Rightarrow y = 1 + 1 \Rightarrow y = 2$ (liga o elemento 1 de A ao elemento 2 de B).

$y = x + 1 \Rightarrow y = 2 + 1 \Rightarrow y = 3$

(não liga uma flecha no elemento 2, pois não existe o elemento 3).

R = {(-1,0), (1,2)}.

A representação por diagrama de flechas está na figura ao lado.



Analisando o diagrama, vemos que essa relação **não é uma função**, pois há elemento no conjunto A sem flecha. E nesse contexto, não existe domínio, contradomínio ou imagem.

3º exemplo: Dados A ={−1, 0, 1} e B = {5, 6, 7}, vamos verificar se a relação $R: A \to B$, definida por $y = x^2 + 5$ é uma função.

Solução: Usando os elementos de A={−1, 0, 1 } em $y = x^2 + 5$, temos

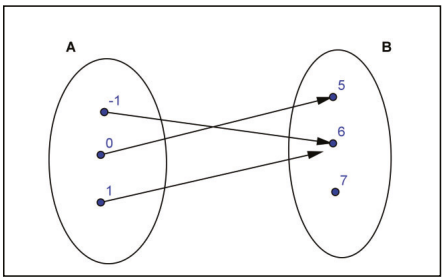
$y = x^2 + 5 \Rightarrow \ y = (-1)^2 + 5 \Rightarrow y = 6$ (flecha liga o elemento -1 de A em 6 de B);

$y = 0^2 + 5 \Rightarrow \ y = 0^2 + 5 \Rightarrow y = 5$ (uma flecha liga 0 de A em 5 de B);

$y = 1^2 + 5 \Rightarrow \ y = 1^2 + 5 \Rightarrow y = 6$ (outra flecha liga 1 de A em 6 de B).

R = {(-1,6), (0,5),(1,6)}.

A representação por diagrama de flechas está na figura ao lado.



Analisando o diagrama, vemos que essa relação é uma função, pois em todos os elementos do conjunto A partem uma, e somente uma, flecha.

Observação: O fato de no conjunto B "chegar" duas flechas, não significa que a relação acima não é uma função, pois o conjunto que define se uma relação é uma função, é apenas o conjunto A.

Dessa forma: $D(f) = \{-1, 0, 1\}$, $CD(f) = \{5, 6, 7\}$ e $Im(f) = \{5, 6\}$.

O domínio de uma função é também denominado de conjunto de existência da função. Isto é, uma função só está definida para $x \in D(f)$, ou se preferir, a função não está definida para $x \notin D(f)$. No exemplo dos litros de açaí (tabela 5.1), o domínio da função é dado por: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$, isso quer dizer que não existe função para quantidade de x litros negativa.

EXERCÍCIOS 5.1

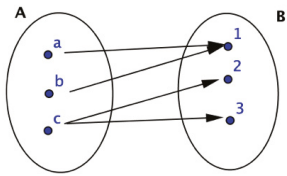
1)Dados A $= \{-1, 0, 3\}$ e B $= \{0, 1, 3, 9, 10\}$, verifique se a relação $R: A \to B$, definida por $y = 2x + 3$ é uma função. Caso afirmativo, informe o domínio, contradomínio e o conjunto imagem.

2)Dados A $=\{1,9\}$ e B $=\{-1,-3,1,3\}$, verifique se a relação $R: A \to B$, definida por $y = \pm\sqrt{x}$ é uma função. Caso afirmativo, informe o domínio, contradomínio e o conjunto imagem.

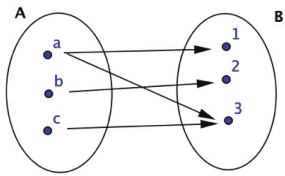
3)Dados A $=\{0,3,6,9\}$ e B $=\{0,3,7,12,27\}$, verifique se a relação $R: A \to B$ definida por $y = \frac{x^2}{3}$ é uma função. Caso afirmativo, informe o domínio, contradomínio e o conjunto imagem.

4)Qual das relações abaixo define uma função de A em B?

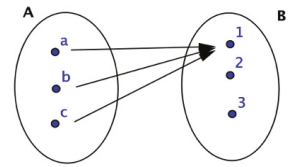
a)



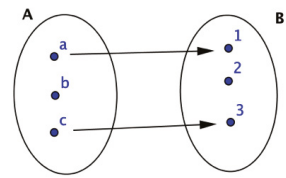
b)



c)



d)



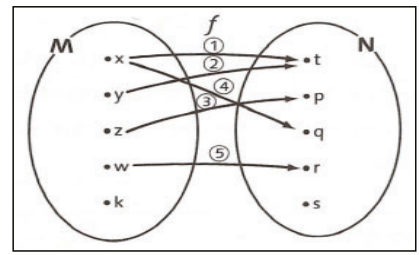
5)(UFF - RJ) Considere a relação f de M em N, representada no diagrama abaixo. Para que f seja uma função de M em N, basta:

a) ( )Apagar a seta 1 e retirar o elemento s.

b) ( )Apagar as setas 1 e 4 e retirar o elemento k.

c) ( )Retirar os elementos k e s

d) ( )Apagar a seta 4 e retirar o elementos k.



6)A produtividade da pecuária de corte vem crescendo em diversos indicadores, mas um dos poucos indicadores que permitem aferir esse crescimento é a produtividade do rebanho, ou seja, os quilos de carne produzidos por animal do rebanho (kg/cab).

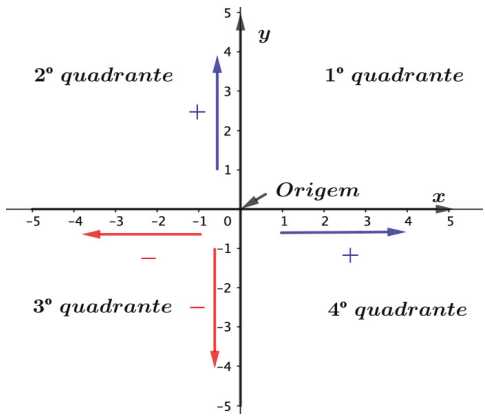
Fonte: (PIRES, 2010)

Considere uma relação entre a produtividade de um município (quilograma por cabeça) e o decorrer dos anos. É possível ter uma função $f: ano \to kg/cab$? Justifique.

5.2. Plano cartesiano

Uma função ou relação também podem ser representadas por meio de um plano que denominamos de plano cartesiano.

O **plano cartesiano ou sistema de coordenadas cartesianas** é um sistema formado por dois eixos x e y perpendiculares, onde na horizontal fica o eixo x, denominado de eixo das abscissas, e na vertical o eixo y, denominado eixo das ordenadas. Por definição, cada eixo representa uma reta real, isso quer dizer que, cada eixo é definido pelo conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$) e, consequentemente, o plano cartesiano é representado em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$. Por convenção, os valores negativos de x ficam à esquerda da origem e os positivos à direita da origem, e os valores negativos de y ficam abaixo da origem e os positivos acima. Os eixos dividem o plano em quatro quadrantes.



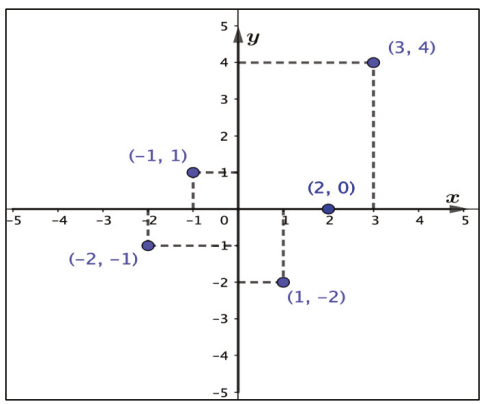
SAIBA MAIS!

- *A ordem dos quadrantes segue o sentido anti-horário.*
- *Os pontos sobre os eixos pertencem aos dois quadrantes e o zero pertence aos quatro quadrantes.*
- *O plano cartesiano foi criado pelo Matemático e Filósofo* ***René Descartes*** *(1596-1650).*

Ponto - Um ponto é a representação de um par ordenado (x, y), em que x é chamada de abscissa do ponto e y a ordenada do ponto.

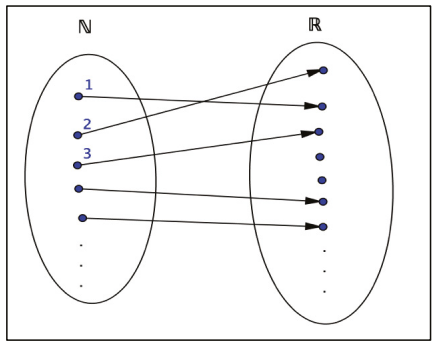
Vamos representar a relação R = $\{(-2,-1),(-1,1),(1,-2),(2,0),(3,4)\}$ no plano cartesiano.

O ponto (-2, -1) tem como valores $x = -2$ e $y = -1$. Após localizar os dois valores nos seus respectivos eixos, traçam-se sobre esses valores, segmentos seccionados e paralelos aos eixos, buscando o ponto de encontro que é a representação do ponto. Fazendo o mesmo com os demais pontos, temos essa relação representada na figura ao lado.



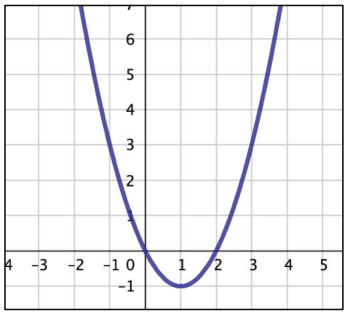
5.2.1. Função no plano cartesiano

Em muitos casos que envolvem funções (ou relações) f: A→B, é comum utilizarmos conjuntos numéricos ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$ e $\mathbb{R}$) ou intervalos numéricos para representar os conjuntos A e B. Como esses conjuntos são infinitos, a representação e análise por diagrama de flechas pode não ser inteligível. Por exemplo, seja um função $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida por uma lei de associação qualquer. Devemos imaginar todos os números naturais no conjunto A e todos os números reais no conjunto B e além disso, ligar todas as flechas que representam as imagens. O que não é uma tarefa fácil de compreender.



Vejamos agora, a representação de uma função no plano cartesiano e como exemplo mais geral, uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Nos eixos x e y, teremos todos os números reais representado na horizontal e na vertical, e como são infinitos pontos, o gráfico será representado por um "tracejado" (e não apenas alguns pontos) cuja direção e forma, obedece a disposição dos pontos, caso fossem postos um a um.

Exemplo: A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = x^2 - 2x$ está a seguir e foi construída com o auxílio de um software de computador.



A visualização desse gráfico no software de computador permite visualizar o tracejado e a forma em "U" característica dessa função. Além disso, é possível aumentar o zoom da tela, ver acima ou abaixo do gráfico, detalhes e outras informações.

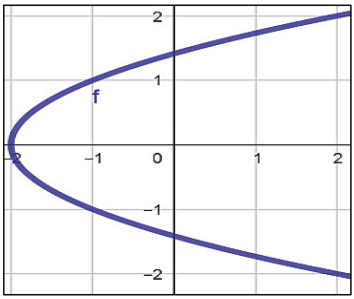
Nas unidades seguintes aprenderemos a construir gráficos de funções, como essa, com ou sem o uso de tecnologias. Nosso objetivo nesse primeiro momento é estabelecer um critério para saber se um determinado gráfico de uma relação já representada no plano cartesiano, representa ou não, uma função.

Como os valores do conjunto A ficam no eixo x e os valores do conjunto B ficam no eixo y, para um gráfico representar uma função f: A→B é necessário que **"para todo x exista um único y"**.

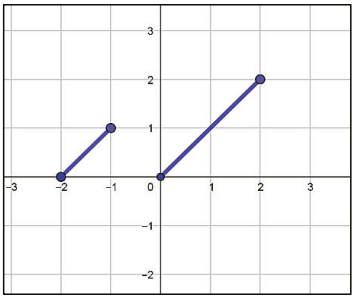
Uma forma prática de verificar isso, é tracejando retas verticais ao longo do eixo x e dentro do intervalo (ou conjunto) numérico dado (conjunto A). Caso alguma reta vertical cruze o gráfico em dois pontos ou não cruze em nenhum ponto, o gráfico não representará uma função. Caso contrário, sim.

Exemplo: Sejam A = $\{x \in \mathbb{R} | -2 < x < 2\}$ e B = $\mathbb{R}$. Verifique se a relação $R: A \rightarrow B$ representada nos gráficos a seguir, representa ou não, uma função.

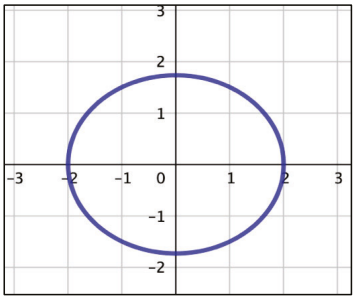
a)



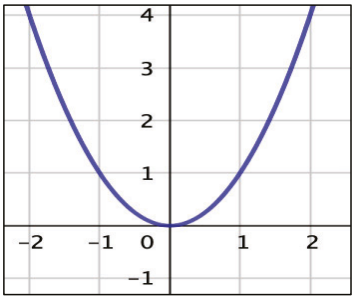
b)



c)

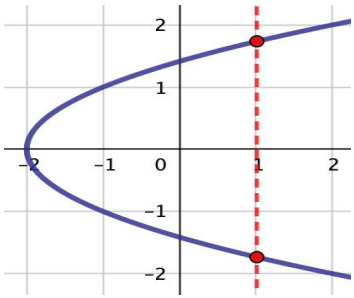


d)



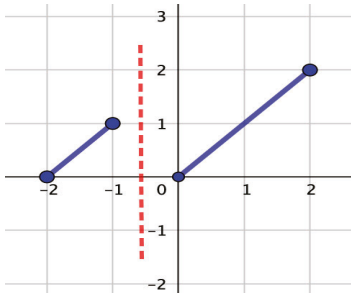
Solução:

a)



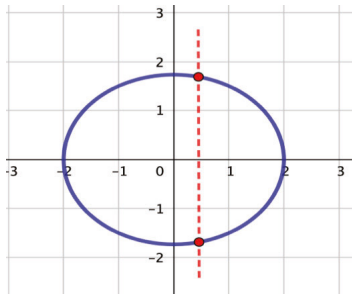
Ao tracejar retas verticais, vemos que o elemento 1 no eixo x (e não só ele), possui duas imagens (verifique que tem gráfico acima e abaixo). Logo, nem para todo x existe um único y, portanto não é uma função.

b)



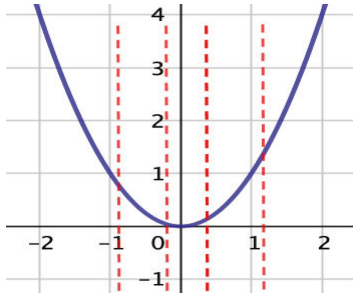
Veja que não há gráfico em qualquer número no eixo x, entre -1 e 0. Desse modo, nem todo x existe y, e consequentemente, não é função.

c)



Qualquer valor no eixo x no intervalo de –2 e 2 possui duas imagens. Portanto, não é função.

d)



Qualquer valor no eixo x em todo o intervalo do domínio (conjunto A) possui uma única imagem (um único y). Dessa maneira, o gráfico representa uma função.

5.3. Cálculo da imagem de uma função

É comum escrevermos $f(x)$ (lê-se "f de x") no lugar do y na lei de associação, quando temos uma função.

Exemplo: Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 2x + 3$, calcule a imagem do elemento 1.

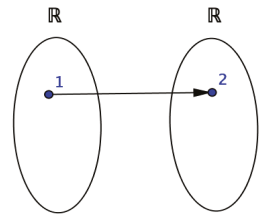
$f(x) = x^2 - 2x + 3$

$f(1) = 1^2 - 2.1 + 3$ (substituindo "x" por 1)

$f(1) = 1 - 2 + 3$

$\boxed{f(1) = 2}$

A imagem do elemento 1 do domínio é o elemento 2.



2º exemplo: Dada a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 5x - 2$, quais os valores de $f(2)$, $f(-3)$ e $f(\frac{1}{2})$?

Solução:

$f(x) = 5x - 2$
$f(-3) = 5.(-3) - 2$
$f(-3) = -15 - 2$
$\boxed{f(-3) = -17}$

$f(x) = 5x - 2$
$f(2) = 5.2 - 2$
$f(2) = 10 - 2$
$\boxed{f(2) = 8}$

$f(x) = 5x - 2 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 5.\frac{1}{2} - 2$
$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5-4}{2} \Rightarrow \boxed{f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}}$

3º exemplo: Seja uma relação $f: A \to \mathbb{R}$ dada pela lei de associação $f(x) = \frac{7x}{\sqrt{x-3}}$. Qual é o maior subconjunto possível de $\mathbb{R}$ que podemos atribuir à A de forma que essa relação seja uma função?

Solução: Há restrições quanto à existência de imagem na lei de associação. Como não existe divisão por zero e não existe raiz quadrada de número negativo. É preciso que

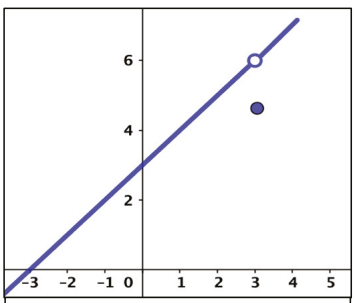
$$x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3 \Rightarrow \boxed{A = D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x > 3\}}.$$

Vale ressaltar que toda função tem seu "tripé": domínio, contradomínio e lei de associação (relação entre y e x) já pré-estabelecido. Portanto, não faz sentido solicitar "cálculo de domínio de uma função", como acontece em alguns livros didáticos, pois se de fato é uma função, o domínio (assim como o tripé) já deve estar pré-estabelecido.

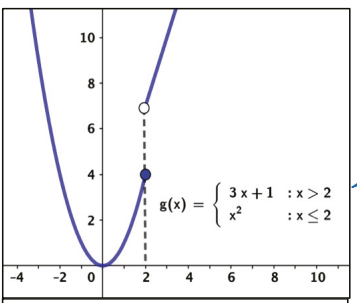
5.4. Crescimento, decrescimento e continuidade de uma função

Definição 5.4.1: Informalmente[6], dizemos que uma função f é contínua em um intervalo $I \in D(f)$, quando não apresenta interrupção (quebras ou buracos) ao longo desse intervalo.

Exemplos de funções descontínuas (ou não contínuas):



A função é descontínua em $x = 3$.



A função é descontínua em $x = 2$.

Esse é um tipo de função definida em duas partes.

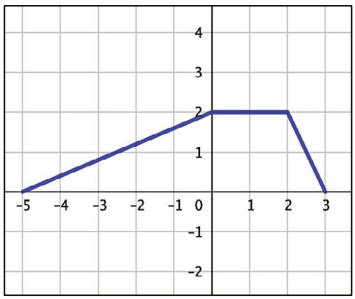
[6] Uma definição contundente sobre continuidade pode ser encontrada no volume 4 dessa coleção na unidade sobre limite.

Definição 5.4.2: Seja uma função f contínua no intervalo $I \in D(f)$ e considere x_1, $x_2 \in I$, com $x_2 > x_1$, se:

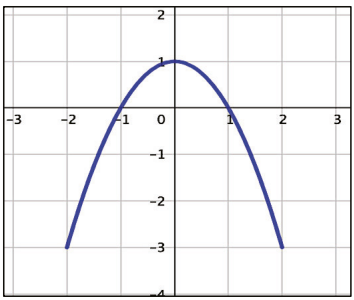
- $f(x_2) > f(x_1)$, então a função é **crescente**;
- $f(x_2) < f(x_1)$, então a função é **decrescente**;
- $f(x_2) = f(x_1)$, então a função é **constante**.

De outra forma, com a função representada no plano cartesiano, devemos analisar sua evolução da esquerda para direita. Caso as imagens estejam aumentando (gráfico subindo), trata-se de função crescente, caso estejam diminuindo de valor (gráfico descendo), temos função decrescente. E é claro, mantendo-se o mesmo valor (gráfico horizontal), a função é constante.

Exemplos:



A função é crescente no intervalo]-5,0[, constante no intervalo [0,2] e decrescente no intervalo]2,3[.



A função é crescente no intervalo]-2,0[, decrescente no intervalo]0,2[e constante no ponto (0, 1).

5.5. Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas

Definição 5.5.1 (função injetiva): Uma função f: A→B é dita injetiva (ou injetora) se, e somente se, para todos $x_1 \neq x_2$ pertencentes à A, temos $f(x_1) \neq f(x_2)$.

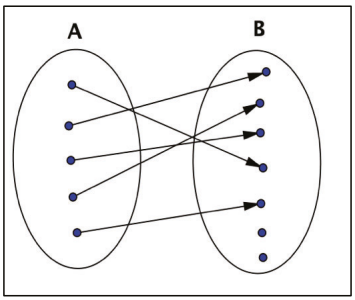
Em outras palavras: uma função é injetiva quando cada elemento da imagem está ligado a um único elemento do **domínio**.

Definição 5.5.2 (função sobrejetiva): Uma função f: A→B é dita sobrejetiva (ou sobrejetora) se, e somente se, para todo $y \in$ B, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Isso quer dizer que, uma função é sobrejetiva quando não há elemento no contradomínio (conjunto B) que não tenha um correspondente no domínio. Isso equivale a afirmar que o conjunto imagem é igual ao contradomínio da função (CD(f) = Im(f)).

Definição 5.5.3 (função bijetiva): Uma função f: A→B é dita bijetiva (ou bijetora ou que há uma relação biunívoca) se, e somente se, for simultaneamente injetiva e bijetiva.

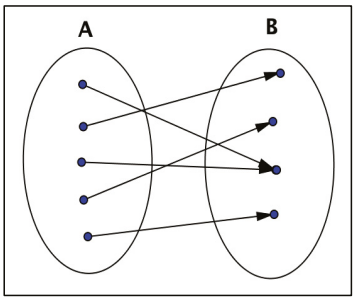
Exemplos no diagrama de flechas de f: A→B:



Todos os elementos de B são imagens de um único elemento do domínio (A). Portanto, essa função é injetiva.

Existem elementos sobrando em B ⇒ CD(f) ≠ Im(f). Portanto, essa função não é sobrejetiva.

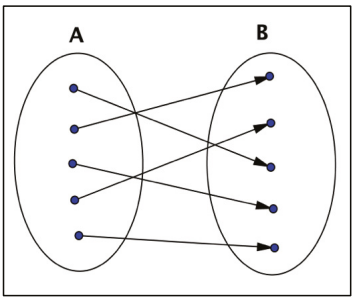
Não é bijetiva, porque não é sobrejetiva.



Existe um elemento de B que chegam duas flechas. Portanto, dois elementos do domínio possui mesma imagem. Essa função não é injetiva.

Não há elementos sobrando em B ⇒ CD(f) = Im(f). Portanto, essa função é sobrejetiva.

Não é bijetiva, porque não é injetiva.

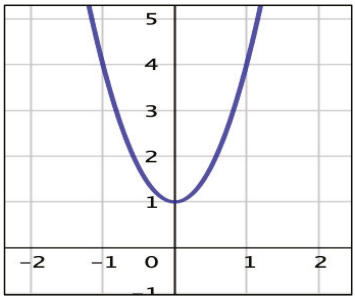


Cada elemento do conjunto imagem está ligado a um único elemento de A. Portanto, a função é injetiva.

Não há elementos sobrando em B ⇒ CD(f) = Im(f). Portanto, essa função é sobrejetiva.

Essa função é bijetiva, pois é injetiva e sobrejetiva.

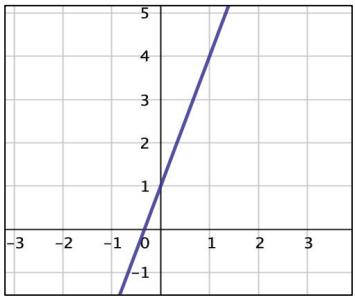
Exemplos no plano cartesiano com funções f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$:



Os elementos -1 e 1 do eixo x possuem mesma imagem 4. Portanto, não é uma função injetiva.

A função não é sobrejetiva, pois $CD(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 1\}$. O que implica em $CD(f) \neq Im(f)$.

Não é bijetiva, porque não é injetiva e nem sobrejetiva.



Todos os elementos y são imagens de um único elemento x. Para $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Portanto, função é injetiva.

A função é sobrejetiva, pois $CD(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}$. O que implica em $CD(f) = Im(f)$.

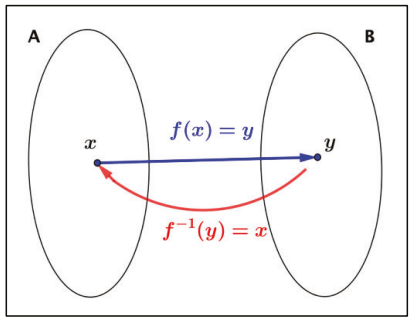
Essa função é bijetiva, pois é injetiva e sobrejetiva.

Importante ressaltar que existem funções que não possui nenhuma das classificações acima.

5.6. Funções inversas

Definição 5.6.1 (função inversa): Diz-se que a função $f^{-1}: B \to A$ é a inversa da função bijetiva $f: A \to B$ se, e somente se, $f(x) = y$ e $f^{-1}(y) = x$ para quaisquer $x \in A$ e $y \in B$.

Na prática, o cálculo da inversa de uma função, consiste em trocar o domínio pelo contradomínio, e o contradomínio pelo domínio, ou seja, trocar x por y e y por x. E para que isso seja possível, é preciso que a função original seja, obviamente, bijetiva (por quê?).



Exemplo: Vamos calcular a inversa da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 4x - 3$.

Solução:

A função é sobrejetiva, pois $CD(f) = Im(f)$. É injetiva, uma vez que para cada $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Portanto, é bijetiva e possui inversa.

Para calcular a lei de associação da função inversa, basta trocar x por y e y por x, na lei de associação da função original.

$$\overset{y}{\overbrace{f(x)}} = 4x - 3 \Rightarrow x = 4y - 3 \Rightarrow 4y = x + 3 \Rightarrow y = \frac{x+3}{4} \Rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = \frac{x+3}{4}}.$$

Logo, a função inversa de f é a função $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{4}$.

2º exemplo: Vamos calcular a inversa da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - 8$.

Solução:

A função é sobrejetiva, uma vez que $\mathrm{CD}(f) = \mathrm{Im}(f)$. É injetiva, pois para cada $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Portanto, é bijetiva e possui inversa.

Para calcular a lei de associação da função inversa, vamos trocar x por y e y por x:

$$\overset{y}{\overbrace{f(x)}} = x^3 - 8 \Rightarrow x = y^3 - 8 \Rightarrow y^3 = -x + 8 \Rightarrow \boxed{y = \sqrt[3]{-x+8}}.$$

Logo, a função inversa de f é a função $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{-x+8}$.

Gráfico: O gráfico da função inversa f^{-1} é simétrica ao gráfico da função f em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares[7].

Veja a seguir os gráficos das funções anteriores comparadas à essa bissetriz.

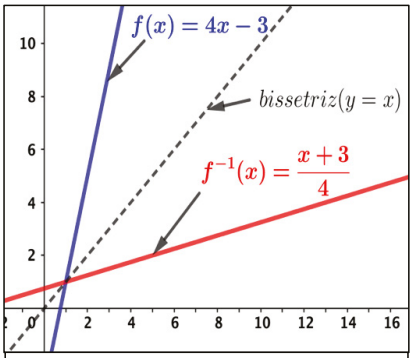


Gráfico do 1º exemplo.

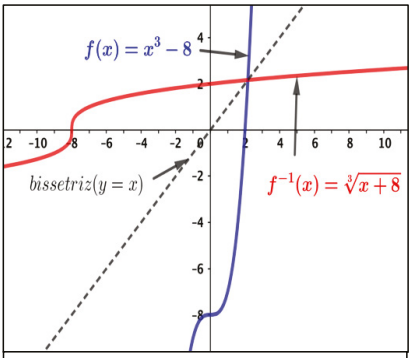


Gráfico do 2º exemplo.

Observação: Para algumas funções não bijetivas, podemos obter uma inversa parcial, desde que essa inversa seja injetora e sobrejetora em algum subconjunto escolhido. Por exemplo, a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ não é sobrejetora e nem injetora. Porém, considerando apenas os valores positivos do domínio e do contradomínio, temos que uma função inversa parcial dessa função pode ser dada por $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$ (troque x por y e y por x).

[7] Denominamos de bissetriz dos quadrantes ímpares:1º e 3º quadrantes, a reta dada pela função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = x$. Ela é a bissetriz desses quadrantes, pois divide o ângulo de 90º em dois ângulos de 45º.

5.7. Função par e função ímpar

Uma função pode ser também classificada como par ou ímpar. Essa classificação depende de algumas características algébricas ou geométricas.

Definição 5.7.1 (função par): Uma função f: A→B é dita **par** se, e somente se, para todo x tem-se $f(-x) = f(x)$.

No gráfico cartesiano, uma função par é sempre simétrica ao eixo y, isto é, os pontos (x, y) e $(-x, y)$ da função são equidistantes ao eixo y.

Exemplo: A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ é uma função par, pois

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x).$$

Veja o gráfico da função $f(x) = x^2$ na figura 5.7.1, que a mesma é simétrica em relação ao eixo y.

Definição 5.7.2 (função ímpar): Uma função f: A→B é dita **ímpar** se, e somente se, para todo x tem-se $f(-x) = -f(x)$.

No gráfico cartesiano, uma função ímpar é sempre simétrica a origem do sistema cartesiano, em outros termos, os pontos (x, y) e $(-x, -y)$ da função são equidistantes a origem do sistema.

Exemplo: A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ é uma função ímpar, pois

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x).$$

Veja no gráfico da figura 5.7.2, que a função $f(x) = x^3$ é simétrica em relação a origem.

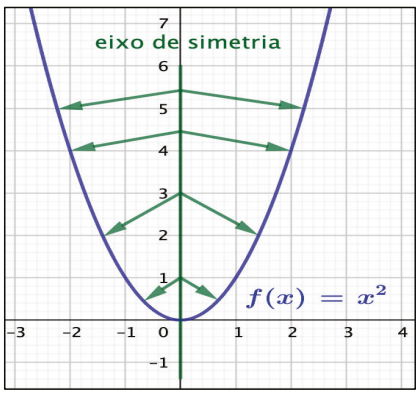


Figura 5.7.1

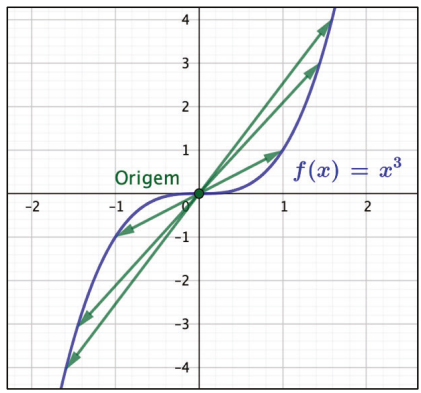
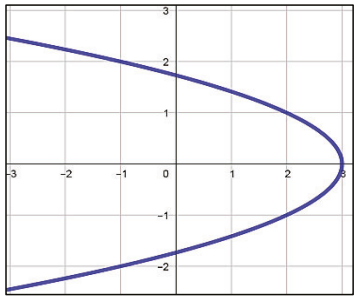


Figura 5.7.2

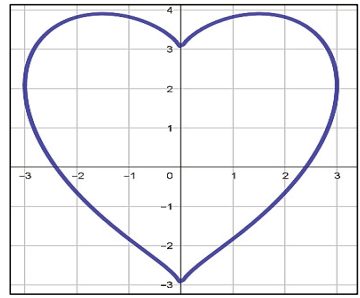
EXERCÍCIOS 5.2

1)Sejam A = $\{x \in \mathbb{R} | -3 < x < 3\}$ e B = $\mathbb{R}$. Verifique se a relação $R: A \to B$ representado nos gráficos a seguir, representa uma função.

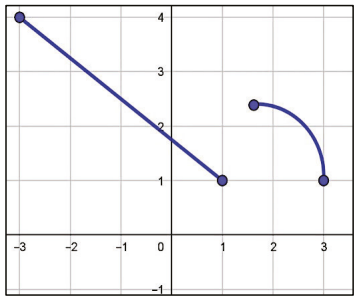
a)



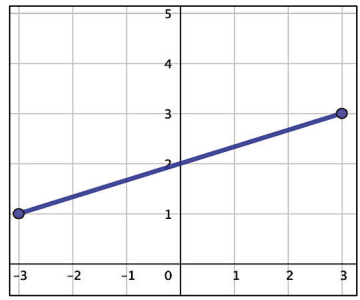
b)



c)



d)



2)(UFPA-PA) Dada a função f de A = $\{0, 1, 2\}$ em B = $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ definida por $f(x) = x - 1$, qual o conjunto imagem de f?

a)$\{-1, 0, 1\}$ b)$\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ c)$\{0, 1, 2\}$ d) $\{-2, -1, 0\}$ e) $\{0, -1, 2\}$

3)Dada a função $f(x) = 3x^2 + 1$, quais os valores de $f(0)$, $f(-1)$ e $f(\frac{1}{3})$?

4)Dada a função $f(x) = x^4 + x^3 - x^2 + 3$, quais os valores de $f(0)$, $f(-1)$ e $f(\frac{1}{2})$?

5)Seja uma relação f: A→$\mathbb{R}$ cujas leis de associação estão abaixo. Qual é o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ que podemos atribuir à A para que cada relação seja uma função?

a) $f(x) = \frac{5x}{x-7}$

b) $f(x) = \frac{9}{x^2-4}$

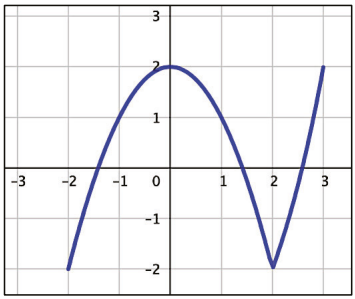
c)$f(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}$

d)$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2-7x+12}$

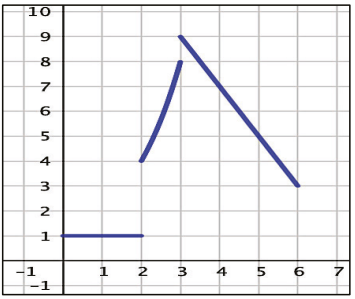
6)Em todas as funções da questão anterior, calcule $f(0)$, $f(2)$ e $f(3)$.

7)Especifique os intervalos em que a função representada nos gráficos a seguir, é crescente, decrescente ou constante. Em seguida, verifique se é contínua dentro do intervalo x onde existe gráfico.

a)



b)



8)(UNIRIO – RJ) Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função definida pela expressão $f(x-1) = x^3$, então o valor de $f(3)$ é igual a:

a) 0. b) 1. c) 6. d) 15. e) 64.

9)Visando o crescimento da parte aérea de plantas cultivadas em vaso, um estudo mostrou o desenvolvimento da altura relativa (AL) da soja tomando-se as médias na densidade 1,0 $Mg\ m^{-3}$ (d) como valor de referência.

Considerando a imagem ao lado que representa o gráfico d x AL, é possível ter uma função $f: d \to AL$? Se sim, especifique o seu domínio.

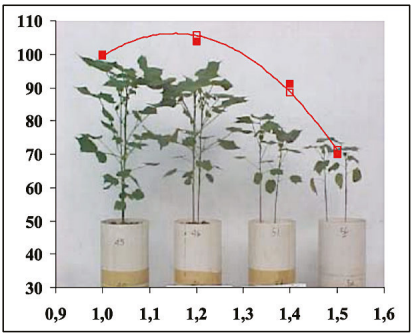
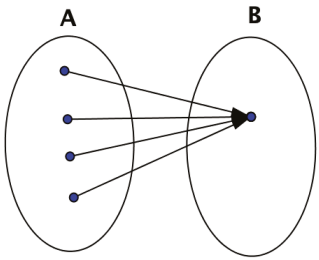


Imagem da fonte

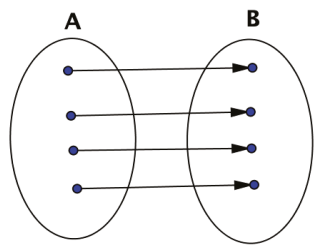
Fonte: (SILVA, MAIA e BIANCHINI, 2006)

10) Classifique as funções f: A→B a seguir como: injetiva, sobrejetiva, bijetiva ou sem classificação.

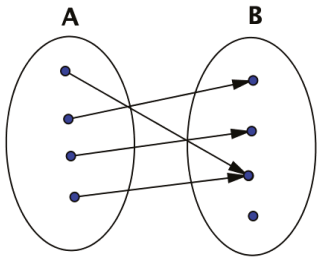
a)



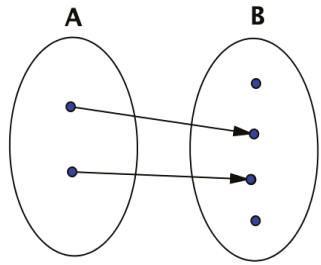
b)



c)



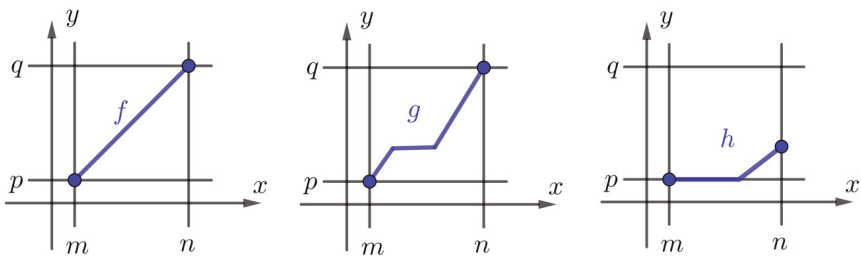
d)



11) (UFF-RJ) Sendo $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e a aplicação f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$, podemos afirmar que f:

a) é sobrejetora e não injetora
b) é bijetora
c) é sobrejetora
d) é injetora
e) não é sobrejetora nem injetora

12) (UFF-RJ) Considere as funções f, g e h, todas definidas em $[m, n]$ com imagens em $[p, q]$ representadas através dos gráficos a seguir:



Pode-se afirmar que:

a) f é bijetiva, g é sobrejetiva e h não é injetiva.
b) f é sobrejetiva, g é injetiva e h não é sobrejetiva.
c) f não é injetiva, g é bijetiva e h é injetiva.

d) f é injetiva, g não é sobrejetiva e h é bijetiva.

e) f é sobrejetiva, g não é injetiva e h é sobrejetiva.

13) (PUCCAMP) Seja f a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, dada pelo gráfico a seguir.

É correto afirmar que:

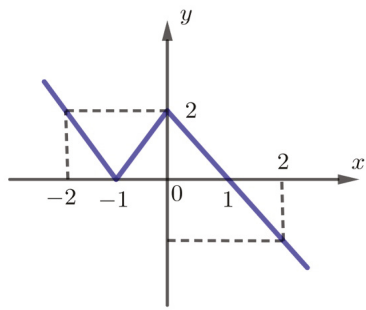
a) f é sobrejetora e não injetora.

b) f é bijetora.

c) $f(x) = -f(x)$ para todo x real.

d) $f(x) > 0$ para todo x real.

e) o conjunto imagem de f é]-∞; 2].



14) Classifique as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a seguir em par ou ímpar ou nem par e nem ímpar.

a) $f(x) = 3x$.

b) $f(x) = 4x^2$

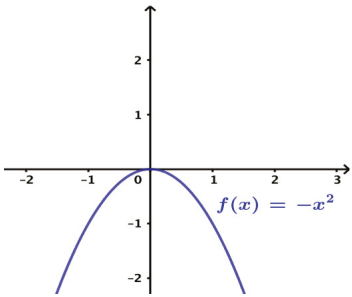
c) $f(x) = |x|$

d) $f(x) = x^3 + x$

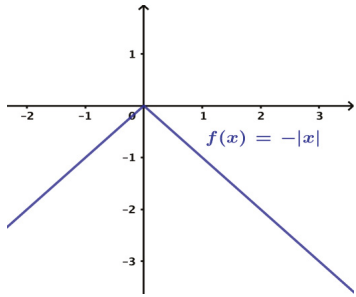
e) $f(x) = 2x^3 + 3$

15) Analise o gráfico e classifique as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a seguir em par ou ímpar ou nem par e nem ímpar.

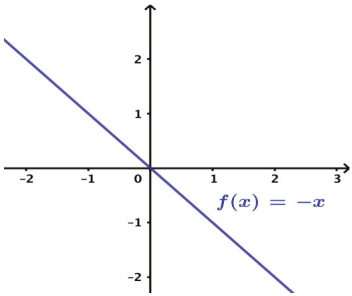
a)



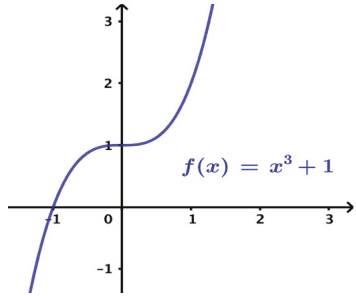
c)



b)

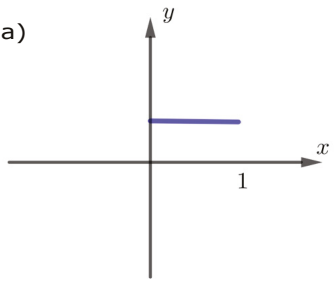


d)

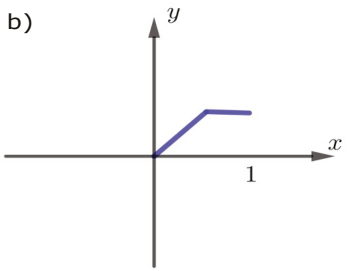


16) (UNIFESP) Há funções $y = f(x)$ que possuem a seguinte propriedade: "a valores distintos de x correspondem valores distintos de y". Tais funções são chamadas injetoras. Qual, dentre as funções cujos gráficos aparecem abaixo, é injetora?

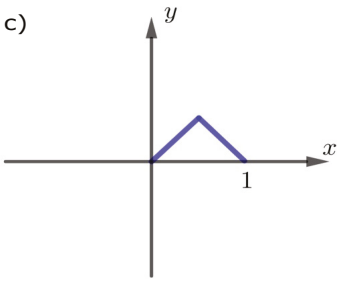
a)



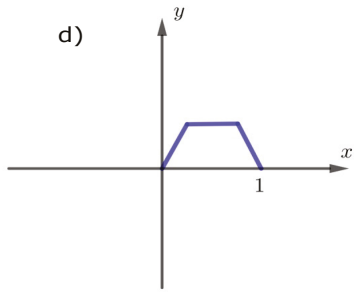
b)



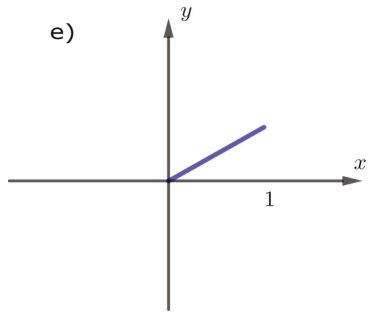
c)



d)



e)



17) (UFRN) Sejam E o conjunto formado por todas as escolas de ensino médio de Natal e P o conjunto formado pelos números que representam a quantidade de professores de cada escola do conjunto E. Se f: E $\rightarrow$ P é a função que a cada escola de E associa seu número de professores, então:

a) f não pode ser uma função bijetora.
b) f não pode ser uma função injetora.
c) f é uma função sobrejetora.
d) f é necessariamente uma função injetora.

18) Calcule a inversa das seguintes funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por:

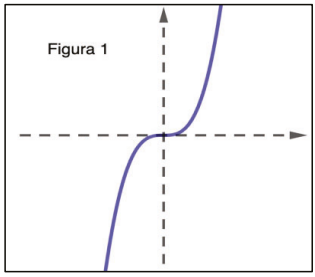
a) $f(x) = 2x$.

b) $f(x) = 3x - 5$

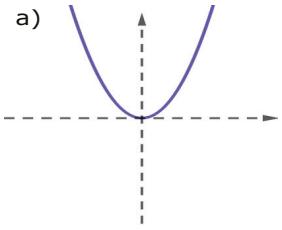
c) $f(x) = 2x^3 + 1$

19) Qual o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ que devemos atribuir ao conjunto A e ao conjunto B, para que a função $f: A \to B$ definida por $f(x) = x^2 + 1$ tenha função inversa. Calcule-a.

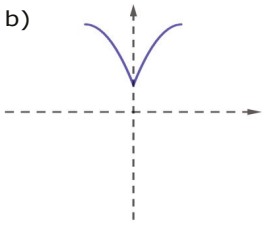
20) (UFES) A função cujo gráfico está representado na figura 1 a seguir tem inversa. O gráfico de sua inversa é:



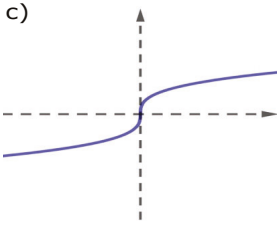
a)



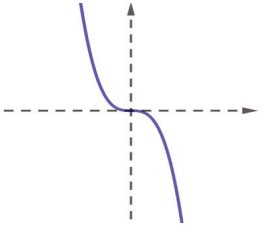
b)



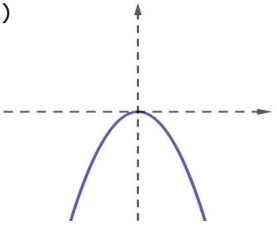
c)



d)



e)



CAPÍTULO

6

FUNÇÃO AFIM

FUNÇÃO AFIM

6. FUNÇÃO AFIM

Uma vez compreendida as noções de função da unidade anterior, iremos estudar a partir de agora, os casos particulares de funções, iniciando pela mais simples e bem conhecida, função afim.

6.1. Definição

Definição 6.1.1: Denomina-se **função afim** qualquer função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida pela lei de associação $\boldsymbol{f(x) = ax + b}$, onde a e b são números reais denominados de coeficientes.

Casos particulares: Quando $b = 0$ (ou seja, $f(x) = ax$), a função afim chama-se **função linear**. Quando $a = 1$ e $b = 0$ (isto é, $f(x) = x$), a função afim chama-se **função identidade**. E quando $a = 0$ ($f(x) = b$), a função afim denomina-se de **função constante**.

Veja alguns exemplos de função afim e seus respectivos coeficientes:

- ✓ $f(x) = -4x + 1 \Rightarrow a = -4 \; e \; b = 1$;
- ✓ $f(x) = x - 1 \Rightarrow a = 1 \; e \; b = -1$; ⇒ o coeficiente de x nesse caso é 1.
- ✓ $f(x) = 5 \Rightarrow a = 0 \; e \; b = 5$; ⇒ Função constante.
- ✓ $f(x) = \frac{1}{8}x \Rightarrow a = \frac{1}{8} \; e \; b = 0$; ⇒ Função linear.
- ✓ $f(x) = x \Rightarrow (a = 1 \; e \; b = 0)$; ⇒ Função identidade.
- ✓ $f(x) = 1 + 2x \Rightarrow (a = 2 \; e \; b = 1)$; ⇒ Atenção para a ordem dos coeficientes.
- ✓ $f(x) = -\sqrt{2} - x \Rightarrow (a = -1 \; e \; b = -\sqrt{2})$; ⇒ Atenção para a ordem dos coeficientes.
- ✓ $f(x) = \frac{-3}{4}x + \frac{5}{8} \Rightarrow (a = \frac{-3}{4} \; e \; b = \frac{5}{8})$.

6.2. Gráfico

O gráfico de uma função afim é sempre uma reta (demonstração na seção 6.5).

Para construir o gráfico de qualquer função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no plano cartesiano, é preciso atribuir valores para x e calcular os valores de $f(x)$. Embora o domínio da

função sejam todos os números reais, para efeito de visualização, devemos escolher apenas alguns números. Os mais usuais são: -2, -1, 0, 1, 2, pelo fato de serem números inteiros e pequenos, além de ser possível visualizar o gráfico em valores positivos e negativos. Porém, fica a cargo do leitor decidir quais os valores de x que deseja utilizar.

1º exemplo: Vamos construir o gráfico da função afim $f(x) = 3x + 2$.

x	$3x + 2$	y
-2	$3.(-2) + 2 = -6 + 2$	-4
-1	$3.(-1) + 2 = -3 + 2$	-1
0	$3.0 + 2$	2
1	$3.1 + 2$	5
2	$3.2 + 2$	8

Observação: Após todos os pontos postos no plano cartesiano, traceja-se uma reta sobre eles. Este procedimento é devido a função ser definida em todos os reais ($\mathbb{R}$) e não só nos valores $-2, -1, 0, 1$ e 2 usados na tabela.

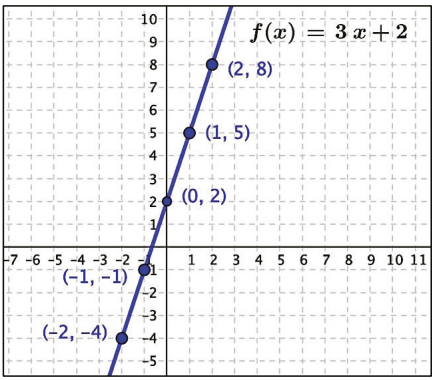


Figura 6.2.1

2º exemplo: Vamos construir o gráfico da função afim $f(x) = -x + 1$.

x	$-x + 1$	y
-2	$-(-2) + 1 = 2 + 1$	3
-1	$-(-1) + 1 = 1 + 1$	2
0	$-0 + 1$	1
1	$-1 + 1$	0
2	$-2 + 1$	-1

Observação: Como dito anteriormente, os valores utilizados para x são livres. Se os valores escolhidos fossem 0, 1, 2, 3 e 4, por exemplo, a parte da reta visualizada no gráfico seria essa:

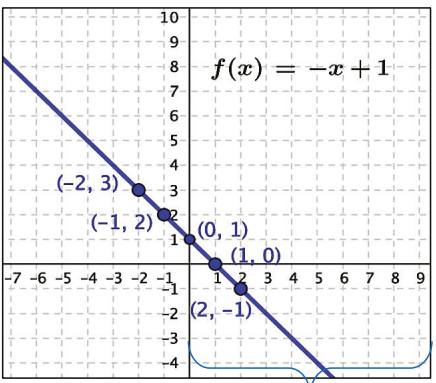


Figura 6.2.2

Analisando os dois gráficos, podemos perceber que a função do 1º exemplo é crescente e a função do 2º exemplo é decrescente, para todo $x \in \mathbb{R}$. E de forma imediata, é possível obter essa informação sem ser preciso construir o gráfico, veja o teorema a seguir.

Teorema 6.2.1: Dada uma função afim na forma $f(x) = ax + b$,

- Se $a > 0$ (positivo), então a função é **crescente**;

- Se $a < 0$ (negativo), então a função é **decrescente**;
- Se $a = 0$, então a função é **constante**.

Compare o sinal do coeficiente a com o crescimento e o decrescimento de suas respectivas funções, nos exemplos anteriores.

Demonstração: Partindo da expressão em que $x + t > x$, para $t > 0$, então a função é crescente se $f(x+t) > f(x)$, e decrescente se $f(x+t) < f(x)$ (ver definição 5.4.2 de crescimento e decrescimento de função). Substituindo na função afim, temos

$$f(x) = ax + b \Rightarrow f(x+t) = a(x+t) + b \Rightarrow f(x+t) = ax + a.t + b \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x+t) = \underbrace{ax + b}_{f(x)} + a.t \Rightarrow \boxed{f(x+t) = f(x) + a.t}.$$

Como $t > 0$ (positivo), para $a > 0$ implica em $f(x+t) > f(x)$ (função crescente), se $a<0$ implica em $f(x+t) < f(x)$(função decrescente) e caso $a = 0$, implica em $f(x+t) = f(x)$ (função constante). Demonstrando o teorema.

No último caso, $a = 0$ (função constante), a reta é paralela ao eixo x, ou seja, nem crescente e nem decrescente. A expressão que representa essa função não contém a variável x, pois $f(x) = 0.x + b \Rightarrow f(x) = b$. Veja como exemplo, o gráfico da função $f(x) = 5$ que está figura 6.2.3.

Outra informação importante na análise do gráfico, é que o ponto onde o gráfico intersecta o eixo y é sempre em $(0, b)$. Pois, para $x = 0$, temos em $y = ax + b$ que $y = b$. Analise todos os exemplos anteriores e constate essa informação.

O gráfico de uma função afim é sempre uma reta, mas a recíproca tem uma exceção: a reta vertical.

Reta vertical (ou paralela ao eixo y): Neste caso não existe coeficiente a da função, não há variável y e a expressão não representa uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pois para um mesmo valor de x no gráfico há mais de uma imagem. Veja como exemplo, o gráfico de $x = 3$ que está na figura 6.2.4.

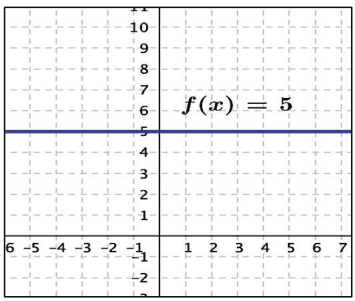


Figura 6.2.3

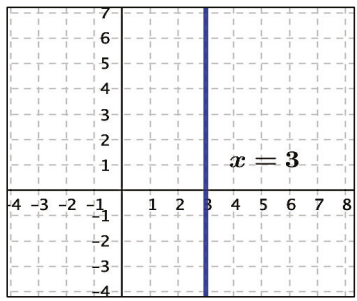


Figura 6.2.4

A seguir vamos demonstrar que, se há uma proporção entre as grandezas envolvidas (x, y), então a função é linear, ou seja, é uma função na forma $y = ax$.

Teorema 6.2.2 (teorema fundamental da proporcionalidade): Seja uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:

- $f(nx)=nf(x)$;
- Pondo $a=f(1)$, dispomos de $f(x)=ax$;
- $f(x+t)=f(x)+f(t)$.

Demonstração: Fazendo a proporção $\frac{p}{q}=\frac{y}{x}$ com $(p,q)\in\mathbb{R}$, temos

$$y=\frac{px}{q}\Rightarrow\ f(x)=\frac{px}{q}\ \Rightarrow\ f(nx)=\frac{pnx}{q}\ \Rightarrow f(nx)=n\frac{px}{q}\ \Rightarrow\boxed{f(nx)=nf(x)}.$$

Substituindo $x=1\Rightarrow\ f(n.1)=n.\underbrace{f(1)}_{a}\Rightarrow\ f(n.1)=n.a\Rightarrow\ \boxed{f(n)=a.n}$.

Se $f(n)=a.n\Rightarrow\ f(x+t)=a.(x+t)\ =\underbrace{a.x}_{f(x)}+\underbrace{a.t}_{f(t)}\ \Rightarrow\boxed{f(x+t)=f(x)\ +\ f(t)}$.

Vale observar que o teorema fundamental da proporcionalidade também é válido para $a=f(1)<0$, ou seja, para função decrescente (verifique!).

Teorema 6.2.3 (caracterização da função afim): Uma função monótona[8] injetiva $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é uma função afim se, e somente se, o acréscimo $f(x+t)-f(x)$ depender apenas de t e não de x.

Demonstração: Se é uma função afim, então

$$f(x+t)-f(x)=a(x+t)+b\ -(ax+b)\Rightarrow ax+a.t\ +b-ax\ -b\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x+t)-f(x)=\ a.t\ \text{(depende apenas de } t \text{ e não de } x)$$

Agora, seja uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ qualquer, em que $f(x+t)-f(x)$ depende apenas de t e não de x. Podemos denotá-la de $g(t)$ como

$$g(t)=\ f(x+t)-f(x).$$

Para fixar as ideias, podemos conceber que a função é crescente, e nesse caso, a função f também é crescente para $g(t)>0$. Com base nesses argumentos e sendo $t,h\in\mathbb{R}$, podemos inferir que

$$g(t+h)=\ f(x+t+h)-f(x)=\ \underbrace{f(x+t+h)-f(x+h)}_{g(t)}+\underbrace{f(x+h)-\ f(x)}_{g(h)}.$$

Como $g(t+h)=g(t)+g(h)$, cabe a aplicação do teorema fundamental da proporcionalidade. Assim, pondo $a=g(1)$, temos $g(t)=at$ e $f(x+t)-f(x)=at$.

Por fim, chamando $f(0)$ de b, concluímos que a função é uma função afim na forma

$$f(0+t)-\underbrace{f(0)}_{b}=at\Rightarrow\boxed{f(t)=at+b}.$$

Demonstrando o teorema.

O teorema 6.2.3 pode ser anunciado de forma equivalente como:

- Os acréscimos iguais a x correspondem à acréscimos iguais à $f(x)$ ou;

[8] Significa que a função é somente crescente ou somente decrescente ou somente constante em todo o intervalo do domínio.

• Os acréscimos sofridos por $f(x)$ são proporcionais aos acréscimos dados a x ou ainda;

• Toda progressão aritmética seja transformada em f em uma progressão aritmética.

Um caso particular pode ser notado nas tabelas anteriores que usamos para construir o gráfico. Como os números -2, -1, 0, 1, 2 são consecutivos, os acréscimos são iguais a 1, logo em $f(x+t)-f(x)=a.t$, temos $f(x+1)-f(x)=a$. Em outras palavras, os acréscimos nas imagens são iguais ao próprio coeficiente a e os resultados da coluna y estão em progressão aritmética (P.A). Veja a tabela do 1º exemplo:

x	$3x + 2$	y
-2	$3.(-2) + 2 = -6 + 2$	-4
-1	$3.(-1) + 2 = -3 + 2$	-1
0	$3.0 + 2$	2
1	$3.1 + 2$	5
2	$3.2 + 2$	8

$a = 3$; +3; +3; +3; +3

Exemplo: Os táxis de uma cidade cobram um valor fixo inicial de R$ 4,00, chamado de bandeirada, mais um valor de R$3,00 por quilômetro rodado.

a) Sendo y o custo de uma corrida e x a distância em quilômetros percorrida, qual a fórmula que relaciona y e x numa corrida de taxi nessa cidade?

Solução: A cada acréscimo igual à quantidade de quilômetros percorrido, há acréscimos iguais ao custo da corrida. Logo, é uma função afim e na forma: $\boxed{y = 3x + 4}$.

b)Qual o preço de uma corrida de taxi nessa cidade, para uma distância de 10km?

Solução:

$y = 3x + 4 \Rightarrow y = 3.10 + 4 \Rightarrow \boxed{y = 34}$. Resposta: R$34,00.

2ºxemplo: A produção de café de uma fazenda tem um custo fixo de R$ 10 mil mais um custo variável de R$ 4 mil por hectare.

a) Sendo y o custo total e x a quantidade de hectares, qual a fórmula que relaciona y e x?

Solução: O custo total é a soma do custo fixo com o custo variável. Para cada acréscimo igual à quantidade de hectares, há acréscimos iguais ao custo total. Logo, é uma função afim na forma: $\boxed{y = 4000x + 10000}$.

b)Quantos hectares foram produzidos para o custo total de R$ 50.000,00?

Solução:

$y = 4000x + 10000 \Rightarrow 50000 = 4000x + 10000 \Rightarrow 4000x = 50000 - 10000 \Rightarrow$

$4000x = 40000 \Rightarrow x = \frac{40000}{4000} \Rightarrow \boxed{x = 10}$. Resposta: 10 hectares.

EXERCÍCIOS 6.1

1)Construa o gráfico das seguintes funções:

a) $f(x) = -3x + 1$

b) $g(x) = 2x + 3$

c) $h(x) = -x$

d) $i(x) = \frac{1}{2}x + 1$

2)Quais das funções abaixo representa uma função afim?

a) $f(x) = -\sqrt{13} - 3x$

b) $z(x) = -5x^2 + 2$

c) $x = -4$

d) $x = 100$

e) $g(x) = \frac{3x}{2}$

f) $h(x) = 100$

3)Classifique as funções abaixo em crescente, decrescente ou constante.

a) $f(x) = 5x + 1$

b) $f(x) = -2x + 8$

c) $f(x) = x + 3$

d) $f(x) = -\sqrt{7}x - 9$

e) $f(x) = 15$

f) $f(x) = -x$

g) $f(x) = 0$

h) $f(x) = \frac{1}{2}x - 50$

4)O custo total de uma plantação é a soma do custo fixo com o custo variável. O custo com as máquinas e tecnologias, por exemplo, se enquadram no custo fixo, uma vez que independe do número de hectares plantados. Já o custo com adubação e mão-de-obra depende do número de hectares plantados, portanto, é um custo variável. Para um custo fixo de R$ 300,00 e variável R$ 150,00 por hectare, qual a fórmula que relaciona o custo total y com o número x de hectares dessa plantação?

5)Em um estacionamento é cobrado R$ 2,00 de taxa inicial mais R$ 2,50 por hora de permanência. Sendo x a hora de permanência e y o valor a ser pago, qual a função que relaciona y e x? Qual o valor a ser pago por um motorista que deixa seu veículo nesse estacionamento por 8 horas?

6)A altura de uma árvore é medida de acordo com a função $h(t) = 5t + 1{,}5$, onde h é altura em metros e t é o tempo em anos. Qual a altura dessa árvore no instante em que foi plantada? Em quanto tempo chegará a altura de 25 metros?

7)Uma empresa de locação de máquinas agrícolas cobra R$ 150,00 iniciais para locação de um trator mais R$ 140,00 por hora trabalhada. Se ao final do dia, o locatário pagou a quantia de R$ 780,00 ao locador, quantas horas foram trabalhadas?

8) Um experimento realizado na Universidade Federal de Mato Grosso, no município de Santo Antônio do Leverger-MT, identificou uma aproximação linear entre a radiação fotossinteticamente ativa interceptada pelas folhas de mangueiras das cultivares (Alfa e Malind) e a formação de matéria seca dos frutos, conforme o gráfico a seguir.

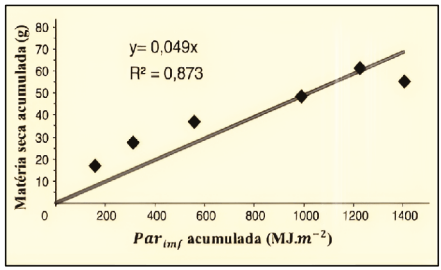


Imagem da fonte

Fonte: (DIAS, SILVA, *et al.*, 2011)

Usando essa aproximação linear $y = 0{,}049x$, qual a quantidade de gramas de matéria seca acumulada para uma radiação fotossinteticamente ativa de 400 (MJ.m^{-2})?

9)O feijão-caupi (Vigna unguiculata) também conhecido como feijão de corda, é uma cultura de grande importância como componente da dieta alimentar e fonte de proteínas das famílias, principalmente, das regiões Norte e Nordeste do Brasil, nas zonas rural e urbana. O conhecimento da área foliar é fundamental no estudo do desenvolvimento das plantas, sendo talvez o mais importante parâmetro.

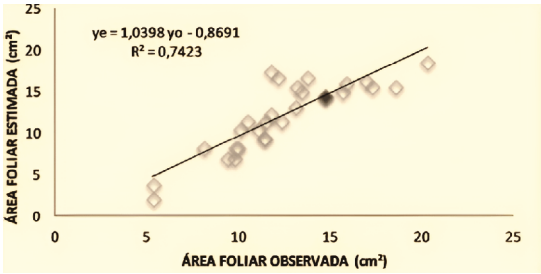


Imagem da fonte

Fonte: (OLIVEIRA, SOUZA, *et al.*, 2014)

Supondo uma relação aproximada $y_e = 1{,}04y_o + 0{,}9$, entre área foliar estimada (y_e) e área foliar observada (y_o) do feijão-caupi, qual o valor de y_o para uma área foliar estimada em 20cm²?

10) O Brasil é o maior produtor de cana-de-açúcar do mundo. Com a cana-de-açúcar há a produção de açúcar, álcoois combustíveis e industriais, aguardente, cera, energia, papel, além de ser consumida *in natura*. A partir de uma análise mássica em usinas de cana-de-açúcar convencional, constata-se que, em média, é possível conseguir 84,5 litros de álcool por tonelada de cana processada.

Fonte: (MARCONDES e BUENO, 2019)

Qual a função que relaciona a produção de y litros de álcool por x toneladas de cana? Construa o gráfico dessa função.

6.3. Zero da função afim

Definição 6.3.1: Denomina-se zero da função afim $f(x) = ax + b$, o número real x tal que $f(x) = 0$.

Portanto, **o zero da função é o ponto onde o gráfico (a reta) intersecta o eixo x.**

1º exemplo: Calcule o zero das seguintes funções.

a) $f(x) = 3x - 6$.

Solução:

Fazendo $f(x) = 0$, temos

$$0 = 3x - 6$$
$$3x - 6 = 0$$
$$3x = 0 + 6$$
$$3x = 6$$
$$x = \frac{6}{3} \Rightarrow \boxed{x = 2}.$$

Veja na figura 6.3.1, que a reta intersecta o eixo x no ponto $x = 2$.

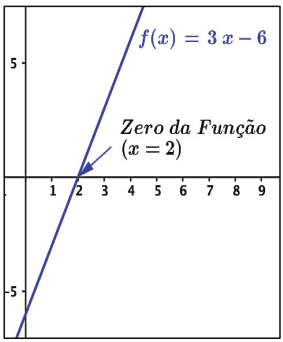


Figura 6.3.1

b) $f(x) = \frac{-1}{4}x + 1$.

Solução:

Fazendo $f(x) = 0$, dispomos de

$$0 = \frac{-1}{4}x + 1 \Leftrightarrow \frac{-1}{4}x + 1 = 0$$
$$\frac{-1}{4}x = 0 - 1$$
$$\frac{1}{4}x = 1 \Rightarrow \boxed{x = 4}.$$

Perceba na figura 6.3.2, que a reta intersecta o eixo x no ponto $x = 4$.

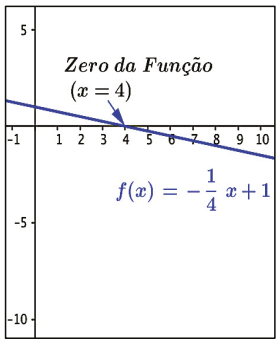
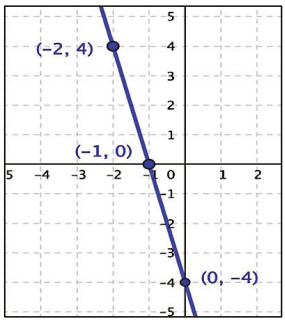


Figura 6.3.2

2º exemplo: Calcule o zero e o coeficiente b da função afim representada no gráfico a seguir.



Solução: O zero da função é o valor de x pelo qual o gráfico intersecta o eixo x. Analisando o gráfico, o mesmo intersecta o eixo x na abscissa -1. O coeficiente b é o valor da ordenada pelo qual o gráfico intersecta o eixo y, que pelo gráfico ao lado, é a ordenada -4.

Respostas: o zero da função é $\boxed{x = -1}$ e o coeficiente $\boxed{b = -4}$.

6.4. O gráfico da função afim no geogebra

Ao abrir o software geogebra[9] digite no campo "entrada" (na parte inferior da tela) a função $f(x) = x + 1$, como exemplo:



Figura 6.4.1

O software mostrará a reta que corresponde a função, conforme figura 6.4.3.

Para calcular o zero da função, selecione no menu superior a opção raízes (conforme a seta vermelha indicada na figura 6.4.2) e clique sobre a reta.

Após o clique o software mostrará o ponto que representa o zero da função (ver figura 6.4.3).

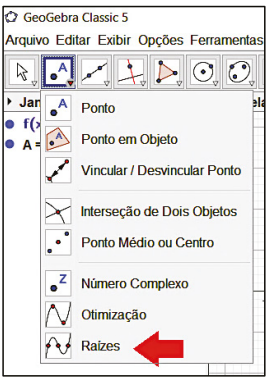


Figura 6.4.2

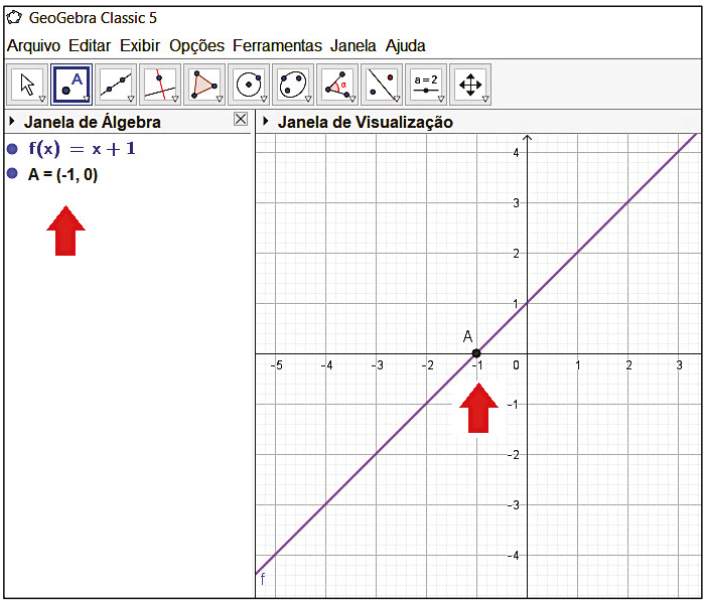


Figura 6.4.3

[9] Veja no prefácio o que é, e quais as utilidades desse software.

EXERCÍCIOS 6.2

1)Determine o zero das seguintes funções:

$a)\ f(x) = -6x + 36$ $\qquad$ $c)\ f(z) = 5z + 15$

$b)\ h(x) = 2x - 10$ $\qquad$ $d)\ g(t) = \frac{-1}{4}t + \frac{9}{4}$

2)A temperatura de uma escala termométrica x é dada por $t_x = 5t_c - 40$, onde t_c é a temperatura na escala Celsius. Qual a temperatura marcada em um termômetro na escala Celsius quando a temperatura na escala x for igual a zero? Qual o ponto de ebulição da água na escala x?

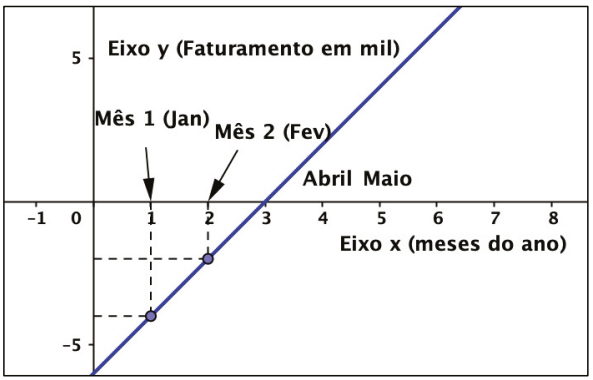
3)A disponibilidade (d) de um determinado nutriente em uma planta varia de acordo com o pH (p) do solo e conforme a função $d(p) = -20p + 180$. Essa planta não terá disponibilidade desse nutriente para um pH igual a?

a) 5 b) 20 c) 7,5 d)6,5 e) 9

4)Os custos de uma empresa é dado por $C(x) = 5x - 20$ e sua receita é dado por $R(x) = 7x - 60$, onde x é quantidade de produtos vendidos. Qual deve ser o valor mínimo de produtos a serem vendidos para que a empresa não tenha prejuízo?

5)A relação entre os meses e os lucros mensais durante um ano de uma empresa é representada pela função f: A→B, definida por $f(x) = 2x - 6$. Onde A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}(os meses do ano) e B = {os lucros da empresa na ordem de 1mil}. Veja a figura a seguir.

Qual o mês do ano em que a empresa teve lucro zero? Quais os meses em que a empresa teve prejuízo?



6.5. Taxa de Variação e cálculo de uma Função afim

Definição 6.5.1: Denominamos de taxa de variação média ou simplesmente taxa de variação de uma função, a expressão

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

Em outras palavras: a taxa de variação de uma função é a razão entre a variação de y e a variação de x, em dois pontos dados.

Seja uma função afim $f(x) = ax + b$ cuja reta passa por dois pontos A(x_A, y_A) e B(x_B, y_B). Como os dois pontos satisfazem a mesma função, então

$$\begin{cases} y_A = ax_A + b \\ y_B = ax_B + b \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema, encontramos: $y_A - ax_A = y_B - ax_B$ e:

$$a = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Concluímos assim, que o coeficiente a de uma função afim é a diferença das ordenadas, dividido pela diferença entre as abscissas de dois pontos da função. Isto é, corresponde a própria taxa de variação da função. E como na função afim, os acréscimos iguais em x correspondem acréscimos iguais em $f(x)$, significa que a taxa de variação é constante (sempre igual), independentemente de quais dois pontos utilizar.

A partir dessas considerações, podemos demonstrar outra informação já conhecida e ratificada no teorema a seguir.

Teorema 6.5.1: O gráfico de uma função afim é sempre uma reta.

Demonstração: Consideremos, sem perda de generalidade, uma função afim crescente, representada por três pontos: (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3), conforme figura 6.5.1.

Da trigonometria do triângulo retângulo (ver seção 10.2 – volume 2), temos $tg\alpha_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ e $tg\alpha_2 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$.

Como a taxa de variação é constante, então $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$, e consequentemente:

$$tg\alpha_1 = tg\alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2.$$

Como o ponto (x_2, y_2) é vértice comum aos triângulos, então os pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3) estão alinhados (pertencem a uma reta).

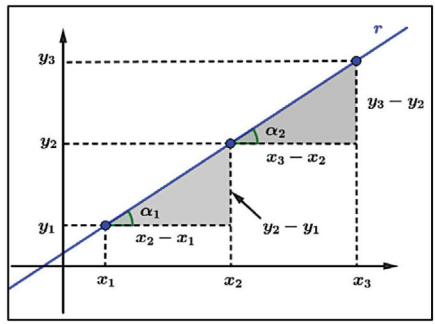


Figura 6.5.1

Os passos para essa demonstração nos trouxe também novas constatações:

• A expressão $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}$ indica uma condição para o alinhamento de três pontos (reveremos esse assunto em geometria analítica plana - unidade 13).

• O coeficiente $\boldsymbol{a}$ da função afim, além de ser a taxa de variação da função, corresponde a tangente do ângulo entre o eixo x e a reta (veremos esse conteúdo na subseção 13.4.1 – volume 2). Por esse motivo, é também denominado de **inclinação ou coeficiente angular da reta**.

Não tão importante, apenas a título de relacionar por completo uma função afim e uma reta, o coeficiente $\boldsymbol{b}$ da função afim é denominado de **coeficiente linear da reta** (ver seção 13.4 – volume 2).

Um excelente exemplo de função afim, são as escalas termométricas. As figuras 6.5.2 e 6.5.3 a seguir, mostram a relação entre as duas escalas Celsius e Fahrenheit.

Pela figura 6.5.2, o aumento ou diminuição da temperatura ocasiona acréscimos iguais nas duas escalas (taxa de variação constante), ou seja, a função que relaciona as duas escalas é uma função afim.

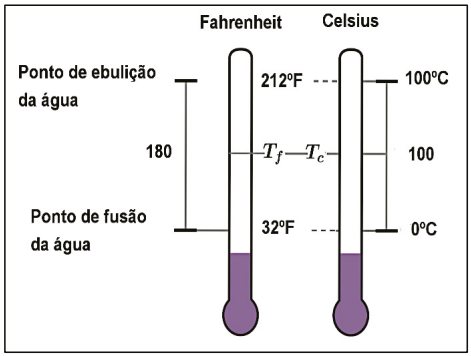


Figura 6.5.2

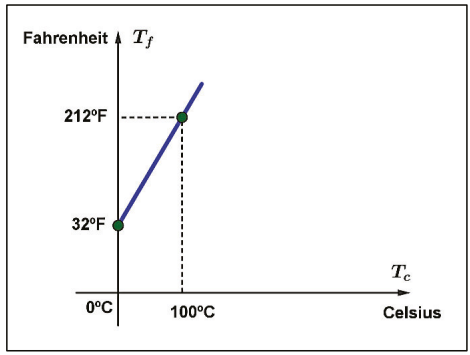


Figura 6.5.3

Calculando o coeficiente a de ambas as escalas:

$$a=\frac{212-32}{100-0}=\frac{180}{100}=\boxed{\frac{9}{5}}.$$

$$a=\frac{T_f-32}{T_c-0}=\boxed{\frac{T_f-32}{T_c}}\Rightarrow\frac{T_f-32}{T_c}=\frac{9}{5}\quad\Rightarrow 5T_f-160=9T_c\Rightarrow$$

$$5T_f=9T_c+160\Rightarrow\boxed{T_f=\frac{9}{5}T_c+32}.$$

Essa fórmula é bastante conhecida na Física e é utilizada para transformar medidas de temperatura entre as escalas.

O gráfico dessa função $T_f=\frac{9}{5}T_c+32$ está na figura 6.5.3.

2º exemplo: Vamos calcular a função afim representada pela reta que passa pelos pontos A(0,1) e B(-1,0).

Solução: Acompanhe o roteiro abaixo usando o coeficiente angular (taxa de variação).

1º) Calcular o coeficiente a (angular da reta) usando os dois pontos.

$$a = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{1-0}{0-(-1)} = \frac{1}{1} = 1.$$

2º) Calcular o coeficiente angular da reta usando um dos dois pontos. Foi escolhido o ponto A(0,1) e um ponto genérico P(x, y).

$a = \frac{0-y}{1-x}$. Como $a = 1$, substituindo:

$$1 = \frac{1-y}{0-x} \Rightarrow 1 - y = -x \Rightarrow \boxed{y = x + 1}.$$

Resposta: $f(x) = x + 1$.

Veja o gráfico na figura 6.5.4.

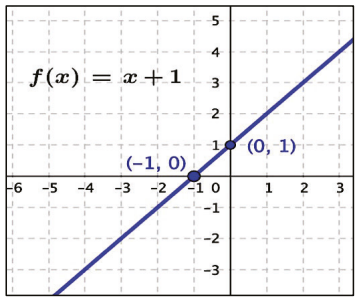


Figura 6.5.4

Segunda solução: Usando sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas.

1º) Substitui o ponto A (0,1) na expressão $y = ax + b$.

$1 = a.0 + b \Rightarrow 1 = b \Rightarrow \boxed{b = 1}$.

2º) Em seguida, substitui o ponto B (-1,0):

$y = ax + b \Rightarrow 0 = a.(-1) + b \Rightarrow 0 = -a + b$.

Substituindo $b = 1$, dispomos de:

$0 = -a + 1 \Rightarrow \boxed{a = 1}$. $\Rightarrow$ Resposta: $\boxed{f(x) = x + 1}$.

Terceira solução: Usando matrizes.

1º) Escreva uma coluna x e y, e em seguida, coloque os pontos A e B (na ordem em que preferir) também em forma de coluna, de forma que os valores de x e y de cada ponto estejam, respectivamente, na parte superior e inferior. Por fim, feche a matriz com outra coluna com os valores de x e y, conforme a seguir.

$$\begin{vmatrix} x & \overbrace{0}^{A} & \overbrace{-1}^{B} & x \\ y & 1 & 0 & y \end{vmatrix}$$

2º) Multiplique as diagonais descendo.

$$\begin{vmatrix} x & 0 & -1 & x \\ y & 1 & 0 & y \end{vmatrix}$$

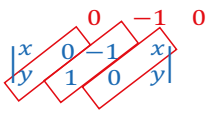
$x \quad 0 \quad -y$

3º) Multiplique as diagonais subindo.

SAIBA MAIS!

Esse método é justificado e também utilizado na seção 13.4 - volume 2 (retas no plano).

.



4º) Iguale a soma dos valores das duas diagonais e isole o y.

$x + 0 - y = 0 - 1 + 0 \Rightarrow x - y = -1 \Rightarrow \boxed{y = x + 1}$.

Observação: Podemos fazer os testes e verificar se a função $y = x + 1$ encontrada está correta. Para isso, testamos os dois pontos dados: A(0,1) e B(-1,0).

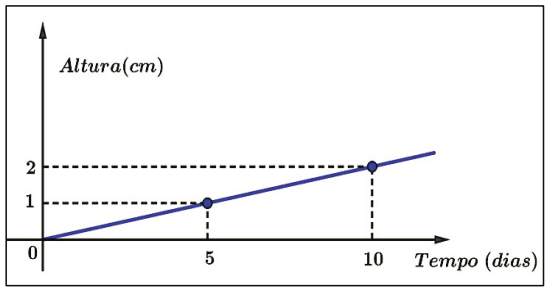
No ponto A, $x = 0$, então pela função, $y = 0 + 1 = 1$ (ok!).

No ponto B, $x = -1$, então $y = -1 + 1 = 0$ (ok!).

Esse teste serve também para saber se outro ponto qualquer pertence ou não a reta. Por exemplo, para saber se o ponto (100,103) pertence a essa mesma reta, basta substituir $x = 100$ na função e verificar se y resulta em 103. Da seguinte maneira:

$y = x + 1 \Rightarrow y = 100 + 1 = 101$. Como 101≠103, o ponto (100,103) não pertence a reta.

3º exemplo: (VUNESP-SP) Um botânico mede o crescimento de uma planta, em centímetro, todos os dias. Ligando os pontos colocados por ele num gráfico, obtemos a figura a seguir.



Se for mantida sempre essa relação entre tempo e altura, a planta terá, no 30º dia, uma altura igual a:

a) 5 cm
b) 6 cm
c) 3 cm
d) 15 cm
e) 30 cm

Solução: Se for mantida a relação entre o tempo e altura, a função se comportará continuamente como uma reta. Para encontrar a função afim que representa essa reta, vamos calcular primeiro o coeficiente a usando os pontos disponíveis gráfico, que são: (5,1) e (10,2).

$$a = \frac{2-1}{10-5} = \frac{1}{5}$$

Em seguida, devemos calcular o coeficiente angular da reta usando um dos dois pontos e um ponto genérico P(x, y). Escolhendo o ponto A(5,1), dispomos de:

$$a = \frac{1-y}{5-x}$$

Como $a = \frac{1}{5}$, ao substituir encontramos

$$\frac{1}{5} = \frac{1-y}{5-x} \Rightarrow 5.(1-y) = 5-x \Rightarrow 5-5y = 5-x \Rightarrow \boxed{y = \frac{x}{5}}.$$

Desejamos a altura da planta no 30º dia, ou seja, para $x = 30$. Dessa maneira,

$$y = \frac{30}{5} \Longrightarrow \boxed{y = 6cm} \text{ (letra b).}$$

Outra solução: Visto que se trata de uma função linear, isto é, uma função afim na forma $f(x) = ax$, então vale a proporção, segundo o teorema fundamental da proporcionalidade (teorema 6.2.2). Desse modo, se a planta cresceu 1cm em 5 dias, então em 30 dias, ou seja, 6 vezes mais, terá altura 6 vezes maior, o que nos dá 6 cm.

É importante mencionar que o teorema 6.2.2, garante a proporção direta somente para funções lineares. Se caso a função crescimento da planta fosse $f(x) = \frac{x}{5} + 3$, ela cresceria 4 cm em 5 dias, mas não cresceria 6 vezes (24 cm) em 30 dias, pois $f(x) = \frac{30}{5} + 3 = 9$ cm.

4º exemplo: Duas árvores de mesma espécie foram plantadas em solos diferentes. A árvore A, inicialmente com 10 cm de altura, foi plantada em solo com fertilizantes e atingiu a altura de 3 metros em 10 meses, enquanto a árvore B, plantada inicialmente com 1 metro de altura e em solo sem fertilizantes, atingiu a altura de 2 metros em 1 ano e 6 meses. Supondo um crescimento linear de ambas:

a) Calcule as funções que representam o crescimento de cada árvore.

b) Em quanto tempo as duas árvores tiveram a mesma altura? E qual foi essa altura?

c) Se a altura máxima dessa espécie é de 10 metros, ou seja, não há mais crescimento após essa altura, em que menor tempo as duas árvores tiveram essa altura?

d) Esboce o gráfico da altura y *de* ambas as árvores em função do tempo x.

Solução:

a) Para um tempo x e altura y, temos os seguintes pontos:

Árvore A $\Rightarrow$ A (0; 0,10) e B(10,3).

$$\begin{vmatrix} x & \overbrace{0}^{A} & \overbrace{10}^{B} & x \\ y & 0{,}10 & 3 & y \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 0 & 1 & 3x \\ x & 0 & 10 & x \\ y & 0{,}1 & 3 & y \\ 0{,}1x & 0 & 10y & \end{matrix} \Rightarrow 0{,}1x + 10y = 1 + 3x \Rightarrow y = \frac{1+2{,}9x}{10} \Rightarrow$$

$\boxed{y = 0{,}29x + 0{,}1}$ (Árvore A).

Árvore B $\Rightarrow$ C (0; 1) e D(18,2).

$$\begin{vmatrix} x & \overbrace{0}^{C} & \overbrace{18}^{D} & x \\ y & 1 & 2 & y \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 0 & 18 & 2x \\ x & 0 & 18 & x \\ y & 1 & 2 & y \\ x & 0 & 18y & \end{matrix} \Rightarrow x + 18y = 18 + 2x \Rightarrow y = \frac{18+x}{18} \Rightarrow$$

$\boxed{y = \frac{x}{18} + 1}$ (Árvore B).

Outra solução:

Os coeficientes b das árvores A e B, são respectivamente: 0,1 e 1.

Substituindo o ponto B (10, 3) na expressão $y = ax + 0{,}1$, obtemos

$$3 = a.10 + 0{,}1 \Rightarrow 2{,}9 = 10a \Rightarrow \boxed{a = 0{,}29} \Rightarrow \boxed{y = 0{,}29x + 0{,}1}.$$

Substituindo o ponto D (18,2) na expressão $y = ax + 1$, encontramos

$$2 = a.18 + 1 \Rightarrow 1 = 18a \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{18}} \Rightarrow \boxed{y = \frac{x}{18} + 1}.$$

b)Na mesma altura as ordenadas (y) de cada função são iguais, logo

$$0{,}29x + 0{,}1 = \frac{x}{18} + 1 \Rightarrow 0{,}29x - \frac{x}{18} = 1 - 0{,}1 \Rightarrow \frac{4{,}22x}{18} = 0{,}9 \Rightarrow$$

$$4{,}22x = 16{,}2 \Rightarrow 4{,}22x = 16{,}2 \Rightarrow x = \frac{16{,}2}{4{,}22} \Rightarrow \boxed{x \cong 3{,}84\ meses}.$$

Substituindo em qualquer uma das equações encontramos a altura (escolhida a árvore A):

$$y = 0{,}29x + 0{,}1 \Rightarrow y = 0{,}29\,.3{,}84 + 0{,}1 \cong 1{,}11 + 0{,}1 \cong \boxed{y = 1{,}21m}.$$

c)A árvore B atingirá essa altura máxima, de 10 metros, em

$$y = \frac{x}{18} + 1 \Rightarrow 10 = \frac{x}{18} + 1 \Rightarrow 9 = \frac{x}{18} \Rightarrow \boxed{x = 162\ meses}\ ou\ 13\ anos\ e\ seis\ meses.$$

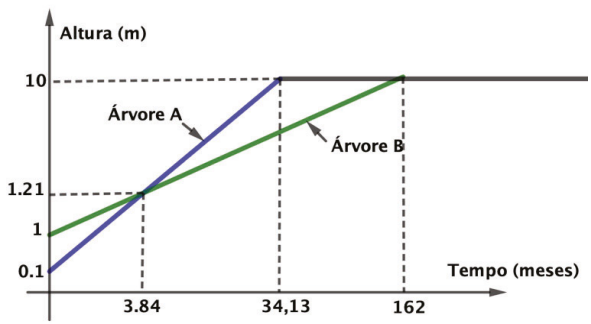
A árvore A atingirá essa altura máxima, de 10 metros, em

$$y = 0{,}29x + 0{,}1 \Rightarrow 10 = 0{,}29\,.x + 0{,}1 \Rightarrow 0{,}29x = 9{,}9 \Rightarrow x = \frac{9{,}9}{0{,}29} \Rightarrow$$

$\boxed{x = 34{,}13\ meses}$ (ou 2 anos e dez meses).

Resposta: Como a árvore A atinge a altura de 10 metros primeiro, e árvore B, somente em 162 meses, então o menor tempo em que as duas árvores terão a mesma altura é 162 meses.

d)



5º exemplo: A amostra a seguir foi extraída da produção de grãos de uma fazenda por hectare:

$Área\ (ha)$	1	4	8	10
$grãos\ (kg)$	150	450	850	1050

a) Qual o modelo matemático (função) que se ajusta aos dados?

b) Qual a produção de grãos para uma área de 25 hectares?

Solução:

a) Para saber se o modelo matemático em questão é uma função afim, iremos calcular a taxa de variação. Para isso, faremos mais uma linha de cálculo na tabela.

x	1	4	8	10
y	150	450	850	1050
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	—	$\frac{450-150}{4-1} = 100$	$\frac{850-450}{8-4} = 100$	$\frac{1050-850}{10-8} = 100$

Como a taxa de variação é igual, trata-se de uma função afim, sendo o coeficiente a essa taxa de variação. Para encontrar o coeficiente b vamos escolher um dos pontos. Escolhendo o ponto (1, 150), temos:

$$y = ax + b \Rightarrow y = 100x + b.$$

Substituindo o ponto (1, 150), encontramos

$$150 = 100.1 + b \Rightarrow b = 150 - 100 \Rightarrow \boxed{b = 50}.$$

Desse modo, a função é $\boxed{y = 100x + 50}$.

b) Como y corresponde a quantidade de grãos e x a área, obtemos para $x = 25$ hectares o valor de

$$y = 100.25 + 50 = 2500 + 50 = 2550 \text{ grãos.}$$

EXERCÍCIOS 6.3

1) Calcule a função afim representada pela reta que passa pelos pontos:

a) A(0,-1) e B(-1,0)

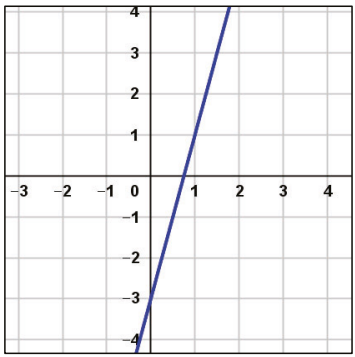
b) A(3,3) e B(-1,2)

c) C(0,5) e D(-4,0)

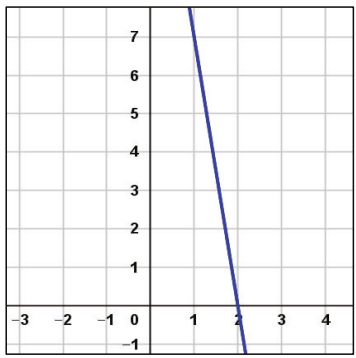
d) E(-1,$\frac{2}{3}$) e F($\frac{1}{2}$,0)

2) Calcule a função afim representada pela reta dos gráficos que estão a seguir.

a)



b)



3) (UDESC 2008) A soma do coeficiente angular com o coeficiente linear da reta que passa pelos pontos A(1, 5) e B(4, 14) é:

a)4 b)-5 c) 3 d) 2 e)5

4)Calcule a função afim representada pela reta cujo coeficiente angular é -1 e passa pelo ponto (2,3).

5)Calcule a função afim representada pela reta cujo coeficiente linear é zero e passa pelo ponto (-1,-1).

6)Um engenheiro agrônomo anotou a altura média de uma plantação cujas informações estão no quadro a seguir:

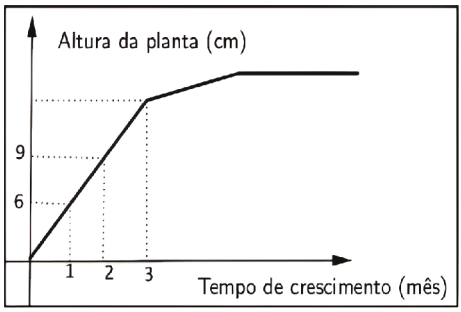
Tempo(meses)	2	5	7
Altura(metros)	0,52	6,52	10,52

Supondo um crescimento sempre linear, qual a altura média dessa plantação em 10 meses? Qual a fórmula que relaciona o tempo e altura?

7)Em um determinado experimento percebeu-se que ao aplicar um acréscimo em uma grandeza (x), a outra grandeza (y) também sofria um acréscimo proporcional. Alguns valores desse experimento estão na tabela a seguir. Complete-a.

x	-4	0	7	9	12
y			19,1		29,6

8)A altura de uma planta foi acompanhada mês a mês, conforme o gráfico. É possível, a partir de uma conta simples e imediata, saber a altura dessa planta no terceiro mês? Se sim, calcule.

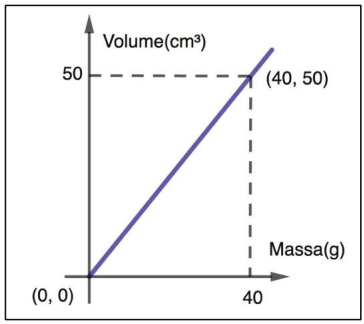


9)(UNESP) Apresentamos a seguir o gráfico do volume do álcool em função de sua massa, a uma temperatura fixa de 0°C.

Baseado nos dados do gráfico, determine:

a) a lei da função apresentada no gráfico;

b) qual é a massa (em gramas) de 30 cm^3 de álcool.



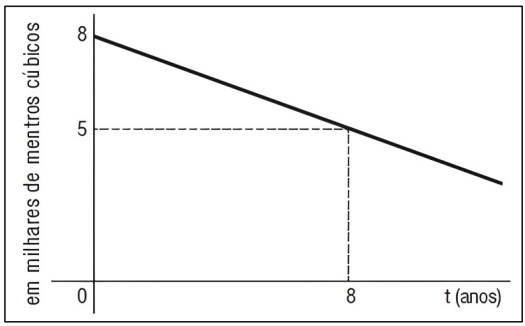
10)Uma empresa A vende um determinado grão por R$ 480,00 a tonelada, mais frete de R$ 6.200,00. Uma empresa B vende o mesmo grão por R$ 530,00 a tonelada mais cobra um frete de 3.700,00.

a) Em qual quantidade de grãos (em toneladas), a empresa A e B tem o mesmo valor de venda incluindo o frete?

b) Esboce um gráfico da tonelada (no eixo x) versus o custo (no eixo y) de cada empresa.

11)(UNESP – SP) Ao ser inaugurada, uma represa possuía 8 mil m³ de água. A quantidade de água da represa vem diminuindo anualmente. O gráfico mostra que a quantidade de água na represa 8 anos após a inauguração é de 5 mil m³.

Se for mantida essa relação de linearidade entre o tempo e a quantidade de água em m³, determine em quantos anos, após a inauguração, a represa terá 2 mil m³.



12) A taxa assimilatória líquida (TAL) representa a capacidade da planta aumentar o peso em termos de área de sua superfície assimilatória, num intervalo de tempo. A TAL também responde a aumentos de IAF (índice de área foliar), mas o efeito é dependente da disposição das folhas na planta.

Fonte adaptada: (REIS, 2018)

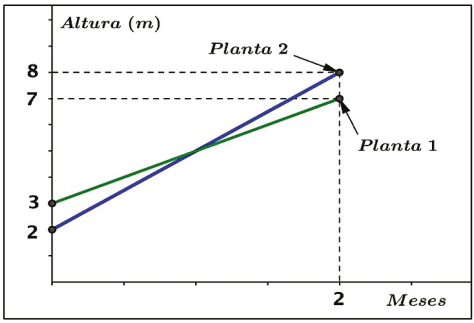
Considerando a tabela a seguir para valores aproximados, para que valor do IAF a beterraba e a couve tem a mesma TAL?

Planta	beterraba		couve	
IAF	1	6	5	3
TAL	100	70	20	60

13)A seguir estão as informações do crescimento linear de duas plantas em relação aos meses.

a) Qual a fórmula que relaciona y altura e x meses de cada planta?

b) Em quanto tempo as duas plantas apresentou a mesma altura?



14)A cada 100g de um adubo A, tem-se 18g de nitrogênio e 30g de potássio. A cada 200g de um adubo B, tem-se 24g nitrogênio e 36g de potássio. Quantos gramas de cada adubo serão necessários para ter em um solo 72g de nitrogênio e 114g de potássio? Faça os gráficos dos pesos do adubo A no eixo x e do adubo B no eixo y e interprete a solução geometricamente.

15)A produção de milho necessita de uma série de fatores de produção, como terra, trabalho, maquinaria, fertilizantes e defensivos. A aplicação que se segue concentrou-se na escolha da combinação ótima de dois fertilizantes – nitrogênio(N) e fósforo(P) – mantendo constante os demais fatores.

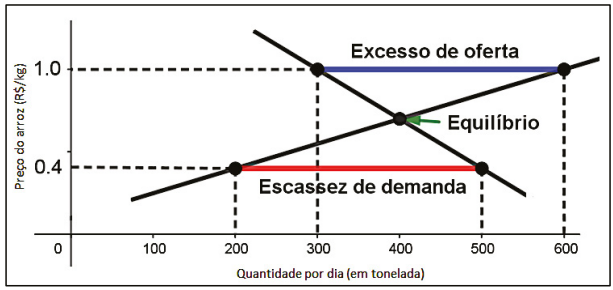
Fonte: (BATALHA, 2017)

Supondo que o nitrogênio e fósforo custem respectivamente 50 e 30 centavos por quilo e que o agricultor deseja despender 500 reais por hectare em adubação, qual a função que relaciona a quantidade de nitrogênio e fósforo? Esboce o gráfico NxP.

16) O conceito de mercado refere-se a uma área geográfica onde compradores e vendedores têm as facilidades para negociar um com o outro os termos do mercado (preço e quantidade) e onde as forças de oferta e demanda atuam de modo a determinar o equilíbrio.

Fonte: (NEVES, ZYLBERSZTAJN e NEVES, 2005)

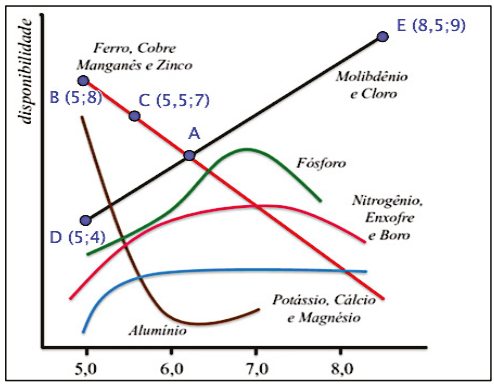
De acordo com o gráfico a seguir, qual o preço do quilograma do arroz e a quantidade por dia (em tonelada) desse ponto de equilíbrio?



17) O pH adequado para a maioria das culturas situa-se na faixa de 6,0 à 7,0. As plantas têm dificuldade de viver em solos com reação inferior a 4,0 ou superior a 9,0. Raramente se encontram solos nessas condições. Porém, mesmo na faixa de 4,0 a 9,0, pode haver problemas de solubilidade e assimilação de nutrientes, o que exige correção do solo.

Fonte: (LUZ, FERREIRA e BEZERRA, 2002)

A imagem a seguir relaciona a disponibilidade dos nutrientes com o pH.



a) Analisando uma conjuntura com todos os nutrientes no gráfico, explique por que a faixa de 6,0 a 7,0 é o pH ideal.

b) Considerando os pontos A, B, C, D e E como referência para os cálculos, qual o valor do pH no ponto A?

18)A tabela a seguir mostra uma estimativa da produtividade de uma cultura de soja (quantidade de plantas por hectare), a partir da quantidade de plantas por metro, usando um espaçamento de 40cm.

Plantas por metro	8	9	10	11	12
Plantas por hectare (mil)	200	225	250	275	300

Fonte adaptada: (SILVA, 2015)

a) Qual o modelo matemático e a função que se ajusta aos dados?

b) Quantas plantas por hectare terá essa cultura, se a quantidade de plantas por metro for 16?

6.6. Regressão linear

Nos exemplos e nos exercícios anteriores, os dados foram rigorosamente representados por funções afim porque tiveram suas fontes adaptadas. Porém, dentro de um contexto estatístico, com dados provenientes de experimentos ou de outras fontes com informações não adaptadas, isso é raro de acontecer.

Não obstante, e em alguns casos, é possível que os dados se aproximem de uma reta, de uma mesma taxa de variação, o que sugere que a função que melhor se aproxima aos dados, nesse contexto, seja uma função afim.

Para calcular essa função iremos adotar dois métodos: a média aritmética da taxa de variação (método alternativo) e a regressão linear (estudada na estatística). Ambos os métodos consistem em encontrar uma função afim que se ajusta, com excelente aproximação, aos dados envolvidos, permitindo, portanto, calcular, estimar e fazer projeções a partir dessa função.

1º método (média aritmética da taxa de variação): Esse método consiste em calcular a função de ajuste usando a média aritmética das abcissas (x) e das ordenadas (y), além da média aritmética das taxas de variação.

Exemplo: A safra de um grão em função de doses crescentes de adubo nitrogenado aplicado em cobertura, estão expressos a seguir:

$Nitrogenio\ kg\ ha^{-1}$	10	20	30	40	50
$Safra\ kg\ ha^{-1}$	1100	2200	3200	4100	5300

a) Qual a função linear que se aproxima aos dados?

b) Qual o valor aproximadamente da safra para uma dose de N = 60 $kg\ ha^{-1}$?

Solução:

a) Completando a tabela com a taxa de variação e as médias aritméticas:

$Nitrogenio$ $(kg\ ha^{-1})$	$Safra$ $(kg\ ha^{-1})$	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
10	1100	
20	2200	$\frac{2200-1100}{20-10} = 110$
30	3200	$\frac{3200-2200}{30-20} = 100$
40	4100	$\frac{4100-3200}{40-30} = 90$
50	5300	$\frac{5300-4100}{50-40} = 120$
$\overline{x} = 30$	$\overline{y} = 3180$	$\frac{\overline{\Delta y}}{\overline{\Delta x}} = 105$

Observe que as taxas de variação estão relativamente próximas da igualdade, o que sugere que seja a função afim, a função que melhor se aproxima aos dados.

Médias aritméticas

O coeficiente angular da reta será $\boxed{a = 105}$ e o ponto a ser utilizado na substituição será o (30, 3180), conforme a seguir.

$y = ax + b \Rightarrow y = 105x + b.$

$3180 = 105.30 + b \Rightarrow b = 3180 - 3150 \Rightarrow \boxed{b = 30}$. A função é $\boxed{f(x) = 105x + 30}$.

Veja no gráfico da figura 6.6.1 a excelente aproximação da reta aos pontos.

b) $y = 105x + 30 \Rightarrow y = 105.60 + 30 = 6330.$

Para uma dose de N = 60 $kg\ ha^{-1}$, a safra será de aproximadamente 6330 $kg\ ha^{-1}$.

2º método (mínimos quadrados): Esse método é conhecido na estatística como regressão linear utilizando o método dos mínimos quadrados. Vamos aos cálculos e a fórmula.

A somatória dos quadrados dos desvios é

$(y_1 - y)^2 + (y_2 - y)^2 + (y_3 - y)^2 + \cdots (y_n - y)^2$.

Pelo qual podemos escrever como: $S = \sum_{i=1}^{i=n} (y_i - y)^2$.

Considerando $y = ax + b$, temos: $S = \sum_{i=1}^{i=n} (y_i - ax_i - b)^2$.

O valor mínimo de S é dado por: $\begin{cases} \sum(y_i - ax_i - b) = 0 \\ \sum x_i(y_i - ax_i - b) = 0 \end{cases}$.

A demonstração dessas fórmulas encontra-se no volume 4 dessa coleção.

E os valores de a e b são dados por:

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{i=n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{i=n} x_i \sum_{i=1}^{i=n} y_i}{n\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i\right)^2} \text{ e } b = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} y_i - a\sum_{i=1}^{i=n} x_i}{n}.$$

Utilizando as médias equivale a:

$$a = \frac{\overline{x_i y_i} - \overline{x_i} \cdot \overline{y_i}}{\overline{x_i^2} - (\overline{x_i})^2}$$

$$b = \overline{y_i} - a.\overline{x_i}$$

Onde:

- $\overline{x_i y_i}$ é a média aritmética dos valores de xy;
- $\overline{x_i}$ é a média aritmética dos valores de x;
- $\overline{y_i}$ é a média aritmética dos valores de y;
- $\overline{x_i^2}$ é a média aritmética dos valores de x^2;
- $(\overline{x_i})^2$ é o quadrado da média aritmética dos valores de x.

Utilizando o exemplo anterior, vamos calcular a função afim que se ajusta aos dados de acordo com esse 2º método.

Solução:

a) De acordo com o método acima, é preciso calcular os valores de xy e x^2, além das médias de x, y, xy e x^2.

x	y	xy	x^2
10	1100	11000	100
20	2200	44000	400
30	3200	96000	900
40	4100	164000	1600
50	5300	265000	2500
$\overline{x} = 30$	$\overline{y} = 3180$	$\overline{xy} = 116000$	$\overline{x^2} = 1100$

Médias aritméticas

$$a = \frac{\overline{x_i y_i} - \overline{x_i}\,.\,\overline{y_i}}{\overline{x_i^2} - (\overline{x_i})^2} = \frac{116000 - 30\,.\,3180}{1100 - (30)^2} =$$

$$\frac{116000 - 95400}{1100 - 900} = \frac{20600}{200} \Rightarrow \boxed{a = 103}.$$

$$b = \overline{y_i} - a.\overline{x_i} \Rightarrow b = 3180 - 103\,.30 \Rightarrow \boxed{b = 90}.$$

$$g(x) = ax + b \Rightarrow \boxed{g(x) = 103x + 90}.$$

$b)\ y = 103x + 90 \Rightarrow y = 103.60 + 90 = 6270.$

Para uma dose de N = 60 $kg\ ha^{-1}$, a safra será de aproximadamente 6270 $kg\ ha^{-1}$.

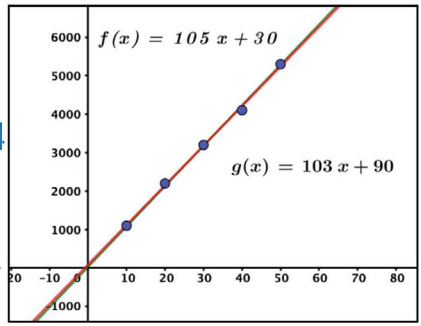


Figura 6.6.1

O gráfico da figura 6.6.1 mostra as duas retas, uma de cada método, quase sobrepostas. Porém, qual das duas retas melhor se aproxima dos dados?

Para responder essa pergunta é preciso primeiro estabelecer qual o critério de proximidade a ser adotado. Vamos utilizar nessa obra a soma dos mínimos quadrados, especificamente o coeficiente de determinação a seguir.

6.6.1. Coeficiente de determinação (R²)

O coeficiente de determinação (R^2), utiliza a soma dos quadrados da regressão a fim de verificar o quanto, em termos percentuais, o modelo matemático proposto é adequado.

O valor de R^2 varia de 0 à 1 (de 0 à 100%). Quanto mais próximo esse coeficiente for de 100% mais o modelo matemático proposto é adequado. Seu valor é calculado por:

$$R^2 = 1 - \frac{SQ_{RES}}{SQ_{DM}}$$

Onde:

- SQ_{RES} é a soma dos quadrados dos resíduos. Resíduo é a diferença entre y da tabela e $\hat{y}$ da reta proposta.
- SQ_{DM} é a soma dos quadrados da diferença entre y e a média de y, representada por $(\overline{y})$.

Convém observar que, para o coeficiente de determinação ser 100% é necessário que SQ_{RES} seja zero (analise a fórmula), ou seja, é preciso que não haja diferença entre y da tabela e $\hat{y}$ da reta proposta. Isso acontece somente quando a reta proposta se ajusta perfeitamente aos dados.

Como exemplo de aplicação, vamos calcular o coeficiente de determinação de cada reta proposta no exemplo anterior e verificar qual delas melhor se aproxima aos dados.

Do 1º método:

x	y	$\hat{y}$ (da reta $105x + 30$)	$(y - \hat{y})^2$ (resíduos)	$(y - \overline{y})^2$ (diferença p/ média)
10	1100	1140	1600	4326400
20	2200	2190	100	960400
30	3200	3240	1600	400
40	4100	4290	36100	846400
50	5300	5340	1600	4494400
	$\overline{y}$ =3180	------	SQ_{RES} =41000	SQ_{DM} =10628000

$$R^2 = 1 - \frac{SQ_{RES}}{SQ_{DM}} \Rightarrow R^2 = 1 - \frac{41000}{10628000} = 0{,}9961 \Rightarrow 99{,}61\%.$$

Do 2º método:

x	y	$\hat{y}$ (da reta $103x + 90$)	$(y - \hat{y})^2$ (resíduos)	$(y - \overline{y})^2$ (diferença p/ média)
10	1100	1120	400	4326400
20	2200	2150	2500	960400
30	3200	3180	400	400
40	4100	4210	12100	846400
50	5300	5240	3600	4494400
	$\overline{y}$ =3180		SQ_{RES} =19000	SQ_{DM} =10628000

$$R^2 = 1 - \frac{SQ_{RES}}{SQ_{DM}} \Rightarrow R^2 = 1 - \frac{19000}{10628000} = 0{,}9982 \Rightarrow 99{,}82\%.$$

A reta (ou a função afim) encontrada utilizando o 2º método (mínimos quadrados) é a função que melhor se aproxima dos dados, pois possui um coeficiente de determinação maior (de 99,82%).

2º exemplo: A produção de grãos (de 15 produtos) pesquisados pela CONAB no Brasil estão na tabela a seguir:

Ano	*Produção*
1	226.544
2	232.722
3	243.965
4	252.269

Fonte: (MINISTÉRIO DA AGRICULTURA, 2016)

a) Qual a função linear que se aproxima aos dados?

b) Calcule o coeficiente de determinação?

c) Qual a projeção para 2020/2021 segundo a função encontrada no item a?

Solução:

a) Utilizando o 2º método (mínimos quadrados), vamos calcular os valores de xy e x^2, além das médias de x, y, xy e x^2. Para simplificar os dados, vamos denotar os anos 2016, 2017, 2018 e 2019, como anos 1, 2, 3 e 4.

Ano	*Produção (mil toneladas)*	xy	x^2
1	226.544	226.544	1
2	232.722	465.444	4
3	243.965	731.895	9
4	252.269	1.009.076	16
$\overline{x} = 2{,}5$	$\overline{y} = 238.875$	$\overline{xy} = 608.239{,}75$	$\overline{x^2} = 7{,}5$

$$a = \frac{\overline{x_i y_i} - \overline{x_i}\,.\overline{y_i}}{\overline{x_i}^2 - (\overline{x_i})^2} = \frac{608239{,}75 - 2{,}5\,.238875}{7{,}5 - (2{,}5)^2} = \frac{11052{,}25}{1{,}25} = 8841{,}8 \Rightarrow \boxed{a = 8841{,}8}.$$

$$b = \overline{y_i} - a.\overline{x_i} \Rightarrow b = 238875 - 8841{,}8\,.30 \Rightarrow \boxed{b = 216770{,}5}.$$

$$y = ax + b \Rightarrow \boxed{y = 8841{,}8x + 216770{,}5}.$$

b)

Ano	*Produção (mil toneladas)*	$\hat{y}$ $(8841{,}8x + 216770{,}5)$	$(y - \hat{y})^2$ (resíduos)	$(y - \overline{y})^2$ (diferença p / média)
1	226.544	225512,3	868064,9	152053561
2	232.722	234454,1	3000170	37859409
3	243.965	243295,9	447694,8	25908100
4	252.269	252137,7	17239,69	179399236
----	$\overline{y} = 238.875$	------	SQ_{RES} =4333170	SQ_{DM} =395220306

$$R^2 = 1 - \frac{SQ_{RES}}{SQ_{DM}} \Rightarrow R^2 = 1 - \frac{4333170}{395220306} = 0{,}9890 \Rightarrow 98{,}90\%.$$

c) O ano de 2020/21 é o ano 5 do nosso quadro acima. Substituindo na função, temos

$$y = 8841{,}8.5 + 216770{,}5 = 260979{,}5.$$

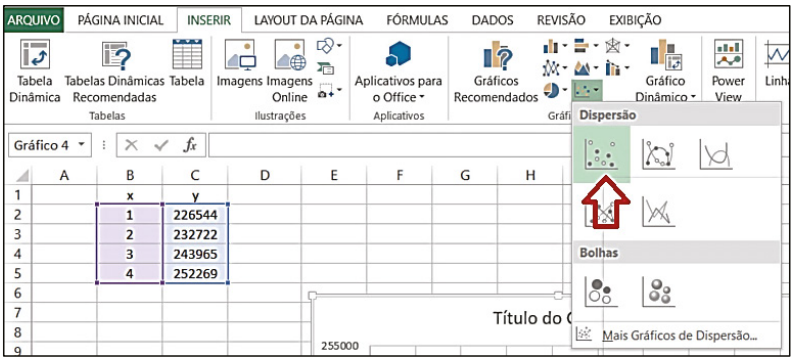
A projeção para 2020/21 é de 260.979,5 mil toneladas de grãos.

6.6.2. Regressão linear usando planilha eletrônica

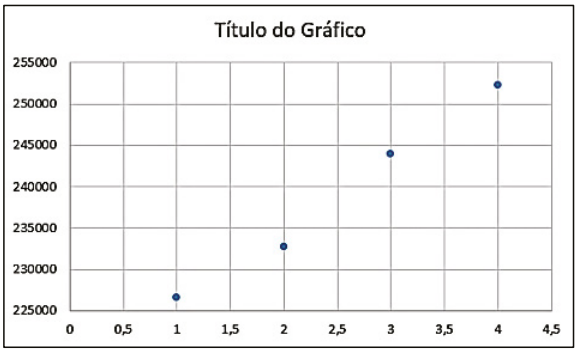
Como demonstração, iremos utilizar usar a planilha do Microsoft Excel (detalhes no prefácio) e as informações do 2º exemplo anterior.

Ao abrir o Microsoft Excel digite numa pasta de trabalho em branco as informações da tabela.

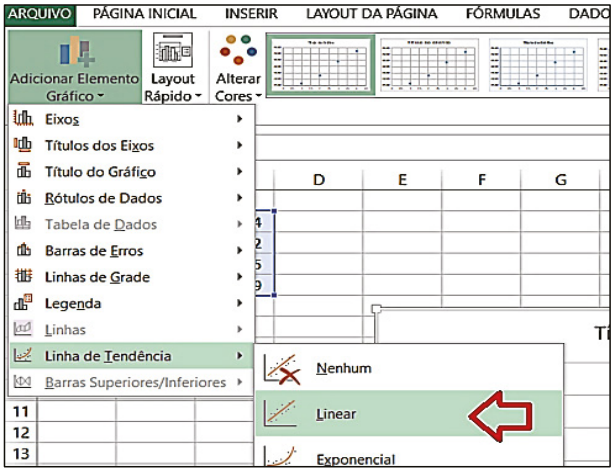
Selecione todos os valores (só os valores), vá ao menu superior e clique na aba "inserir". Nas opções dessa aba, clique em **gráficos de dispersão**, conforme a seguir:



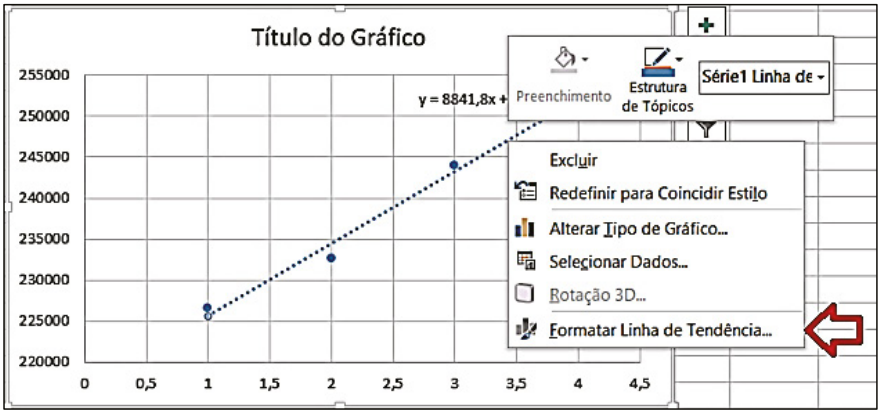
O gráfico a seguir será mostrado:



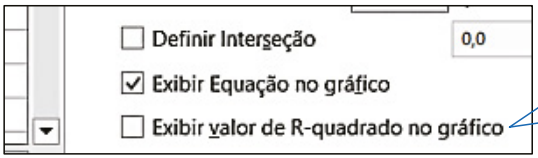
Clique sobre o gráfico em seguida, vá a aba "DESIGN", clique na primeira opção dessa aba: "Adicionar elemento gráfico", depois clique novamente em "Linha de Tendência" em seguida escolha a opção "Linear". Conforme a ilustração a seguir:



Clique sobre a reta com o botão direito e selecione a opção formatar linha de tendência:

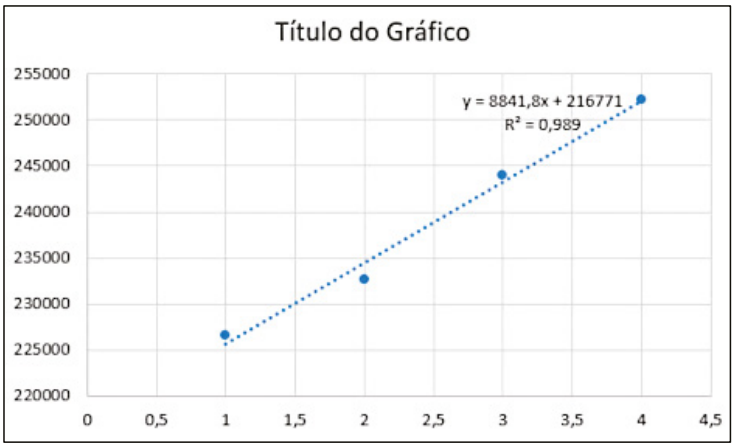


Em seguida marque a opção: "Exibir equação no gráfico":



Marque essa opção caso deseje que o Excel mostre o coeficiente de determinação.

O Excel mostrará a função $y = 8841{,}8x + 216771$, conforme a imagem a seguir.



6.6.3. Regressão linear usando calculadora científica

Como demonstração iremos utilizar a calculadora VINACAL VN-500MS (ou CASIO FX-82MS – detalhes no prefácio) e as informações também do 2º exemplo anterior.

Inicialmente, zere a memória e as configurações da calculadora tecle:



SHIFT, MODECLR, 3, =

2º - Tecle:  (MODECLR, 3 - corresponde a regressão).

A tela da calculadora mostrará as opções que estão na figura 6.6.3.1;

3º - Tecle:  (que corresponde a linear);

4º - Digite os pontos (os pares) separados por vírgula e tecle em  .

Exemplo do primeiro ponto: (1,226544):



Aparecerá n = 1 na tela;

Ao digitar o segundo ponto e teclar em M+ aparecerá n = 2 na tela, e assim sucessivamente. Continue o processo até o último ponto.

5º - Ao término da inclusão dos pontos, tecle:  (SHIFT, 2 - refere-se a variância);

6º - Tecle a seta para a direita da calculadora duas vezes, conforme indica a "mão" na figura 6.6.3.2. A tela apresentada está na figura 6.6.3.3.

7º - Na tela da figura 6.6.3.3, temos as opções: 1 para o coeficiente A (que é o coeficiente linear da função afim), 2 para o coeficiente B (que é o coeficiente angular da função afim) e 3 para r (coeficiente de determinação).

Tecle:  (e o visor mostrará o coeficiente linear: 216770,5 – figura 6.6.3.4);

8º - Refaça os passos 5º e 6º para voltar as opções (de variância);

9º - Tecle:  (e o visor mostrará o coeficiente angular: 8841,8 – figura 6.6.3.5);

10º - Refaça os passos 5º e 6º para voltar as opções (de variância);

11º - Tecle: [3] [=] (e o visor mostrará o coeficiente: 0,9945 – figura 6.6.3.6).

Esse é o coeficiente de correlação, para o coeficiente de determinação é preciso elevar esse valor ao quadrado. Para isso, tecle: [x^2] [=] e o visor mostrará o valor 0,9890.

As figuras estão a seguir.



Figura 6.6.3.1



Figura 6.6.3.2



Figura 6.6.3.3



Figura 6.6.3.4



Figura 6.6.3.5



Figura 6.6.3.6

EXERCÍCIOS 6.4

1) Os dados a seguir mostram o diâmetro a altura do peito (DAP) de uma árvore de acordo com a sua idade (em anos). Supondo uma projeção linear:

$Idade\ (ano)$	$DAP\ (cm)$
5	2,5
10	5
15	7,4
20	9,8
25	12,7

a) Calcule a função que melhor se aproxima aos dados usando o 1º método.

b) Calcule a função que melhor se aproxima aos dados usando o 2º método (mínimos quadrados).

c) Calcule o coeficiente de determinação o 2º método (mínimos quadrados).

d) Calcule o valor do DAP dessa árvore com 40 anos (use 2º método).

e) Construa no gráfico cartesiano da reta de regressão linear e o pontos.

f) Confirme as informações em uma planilha eletrônica ou em uma calculadora científica.

2)Os dados a seguir mostram a altura de uma árvore (em metros) de acordo com a sua idade (em anos). Supondo uma projeção linear:

$Idade\ (ano)$	$Altura\ (m)$
5	2,1
10	6,2
15	10,1
20	16,8
25	22,9

a) Calcule a função que melhor se aproxima aos dados usando o 1º método.

b) Calcule a função que melhor se aproxima aos dados usando o 2º método (mínimos quadrados).

c) Calcule a altura dessa árvore com 40 anos (use o 2º método).

d) Construa no gráfico cartesiano da reta dos mínimos quadrados e o pontos.

e) Confirme as informações em uma planilha eletrônica ou calculadora científica.

3) A área plantada (em mil hectares) por grãos no Brasil, segundo a CONAB, estão divididos por ano conforme a tabela a seguir.

.

Ano	*Produção* (*mil toneladas*)
2016/17	60.920
2017/18	64.071
2018/19	66.641
2019/20	69.097

Fonte: (MINISTÉRIO DA AGRICULTURA, 2016)

Usando a regressão linear (método dos mínimos quadrados), calcule:

a) A função que melhor se aproxima aos dados (use 1, 2, 3 e 4 na primeira coluna).

b) A projeção para 2020/2021.

4) O salário e os anos de experiências dos empregados de uma empresa estão listados a seguir.

Experiência	*Salário*
0	1052,00
1	1354,00
5	2550,00
10	4080,00
12	4700,00

Usando a regressão linear (método dos mínimos quadrados):

a) Qual a função que melhor se aproxima aos dados?

b) Calcule o coeficiente de determinação.

c) Qual a projeção para o salário de um empregado com 15 anos de experiência?

5) Um experimento foi conduzido em pomar comercial no município de Vacaria-RS, nos ciclos vegetativos de 2008/2009 e 2009/2010 para ajustar e testar modelos matemáticos simples, precisos e acurados para estimar a área foliar de macieiras Royal Gala e Fuji Suprema cultivadas sob tela antigranizo e em céu aberto. Os dados do experimento sobre a área foliar (cm²) e as dimensões das folhas (comprimento x largura), estão na tabela a seguir:

Comprimento x *largura*	*Área foliar*
10	6,962
20	13,924
30	20,886
40	27,848
50	34,81

Fonte: (BOSCO, BERGAMASCHI, *et al.*, 2012)

Usando a regressão linear (método dos mínimos quadrados):

a) Qual a função que melhor se aproxima aos dados?

b) Qual o valor aproximado do comprimento x largura de uma macieira com 52,215 cm² de área foliar?

6) Um experimento realizado na cidade de Catolé do Rocha – Paraíba, teve como objetivo avaliar a massa seca da folha e a massa seca da raiz de feijão caupi (*Vigna unguiculata (L.) Walp*) sob doses de biofertilizante e aplicação de diferentes lâminas de irrigação. Os dados estão a seguir:

$Doses\ de\ biofertilizante$	$Massa\ seca\ da\ folha$	$Massa\ seca\ da\ raiz$
0	17,6	14,39
30	19,2	15,9
60	20,7	17,4
90	22,3	18,9

Fonte adaptada: (MARTINS, LAURENTINO, *et al.*, 2018)

Usando a regressão linear (método dos mínimos quadrados):

a) Calcule a função que se aproxima aos dados para as duas massas.

b) Qual o valor da massa seca da folha para uma dose de biofertilizante de 100 ml?

c) Qual deve ser a dose de biofertilizante para que a massa seca da raiz seja igual a 20,4 g?

7)Na tabela a seguir está o valor de produção da laranja (em toneladas) em Porto Grande-Ap, no período de 2006 a 2009.

Ano	$Produção(t)$
2006	*2.010*
2007	*2.640*
2008	*2.874*
2009	*3.819*
2010	*4.222*

Fonte: (PREFEITURA MUNICIPAL DE PORTO GRANDE, 2013)

Usando planilha eletrônica ou calculadora científica:

a) Calcule a função que se aproxima aos dados (use 1, 2, 3 e 4 na primeira coluna).

b) Calcule o coeficiente de determinação.

c) Qual a projeção da produção desse fruto para 2020?

8) Na tabela a seguir estão os valores de crescimento de mudas de pinhão manso (altura da planta) em função das doses de superfosfato simples (DSS) aplicadas:

$Doses\ (kg\ m^{-3})$	$Altura\ da\ planta(cm)$
1,25	*9,67*
2,50	*10,83*
5,00	*11,77*
7,50	*12,07*
10,00	*12,27*

Fonte adaptada: (PRATES, LUCAS, *et al.*, 2012)

Usando planilha eletrônica ou calculadora científica:

a) Calcule a função que se aproxima aos dados.

b) Calcule o coeficiente de determinação.

c) Qual a projeção da altura da planta para uma dose de 15 $kg\,m^{-3}$?

9) A seguir está uma série histórica de 2010 à 2017 da produção de açaí (em toneladas) no estado do Pará.

Ano	*Produção* (t)
2010	*706.548*
2011	*742.484*
2012	*817.246*
2013	*825.513*
2014	*795.253*
2015	*1.000.850*
2016	*1.080.612*
2017	*1.273.568*

Fonte: (TAVARES, HOMMA, *et al.*, 2020)

Usando planilha eletrônica ou calculadora científica:

a) Calcule a função que se aproxima aos dados.

b) Calcule o coeficiente de determinação.

c) Calcule a projeção da produção do açaí para 2019.

CAPÍTULO

7

FUNÇÃO QUADRÁTICA

FUNÇÃO QUADRÁTICA

7. FUNÇÃO QUADRÁTICA

A função quadrática pode ser encontrada em muitas situações nas ciências agrárias, seja no desenvolvimento e otimização de uma cultura em doses diferentes de um determinado nutriente, na produtividade de um grão, na previsão do número de frutos, no crescimento de animais ou plantas, nas projeções de produção e faturamento, entre outros.

7.1. Definição

Definição 7.1.1: Denomina-se **função quadrática**, qualquer função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida pela lei de associação $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$, onde a, b e c são números reais (com $a \neq 0$), denominados de $\boldsymbol{coeficientes}$.

Vejamos alguns exemplos de função quadrática e seus respectivos coeficientes:

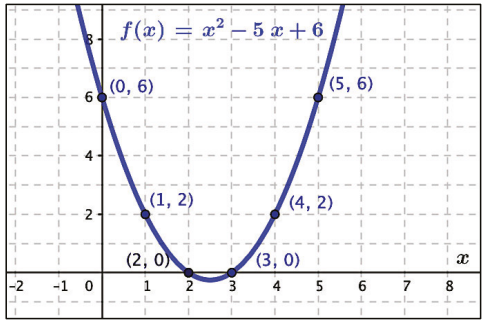
- ✓ $f(x) = 3x^2 - 4x + 1 \Rightarrow a = 3, b = -4 \; e \; c = 1;$
- ✓ $f(x) = x^2 - 1 \Rightarrow a = 1, b = 0 \; e \; c = -1;$
- ✓ $f(x) = -x^2 + 8x \Rightarrow a = -1, b = 8 \; e \; c = 0;$
- ✓ $f(x) = -4x^2 \Rightarrow a = -4, b = 0 \; e \; c = 0;$
- ✓ $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{8}x \Rightarrow a = -\frac{3}{4}, b = \frac{5}{8} \; e \; c = 0.$

7.2. Gráfico

O gráfico de uma função quadrática é uma **parábola** (demonstração na subseção 13.6.4 – volume 2).

Como exemplo inicial, vamos construir o gráfico da função $f(x) = x^2 - 5x + 6$. Para visualizarmos o gráfico (a parábola) dessa função, podemos utilizar os mesmos valores habituais para x (utilizados na função afim: -2, -1, 0, 1 e 2), ou quaisquer outros, uma vez que a função quadrática é também definida para todo o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$). Neste exemplo específico, e com o objetivo de visualizar a sua curvatura pretendida, foram utilizados os valores na tabela abaixo.

x	$x^2 - 5x + 6$	y
0	$0^2 - 5.0 + 6$	6
1	$1^2 - 5.1 + 6 = 1 - 5 + 6$	2
2	$2^2 - 5.2 + 6 = 4 - 10 + 6$	0
3	$3^2 - 5.3 + 6 = 9 - 15 + 6$	0
4	$4^2 - 5.4 + 6 = 16 - 20 + 6$	2
5	$5^2 - 5.5 + 6 = 25 - 25 + 6$	6

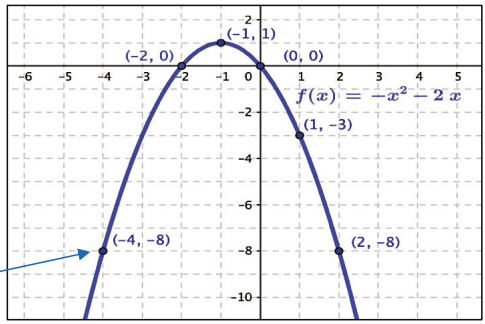


Importante: Após todos os pontos postos no plano cartesiano, traceja-se a curvatura sobre eles. Este procedimento é devido a função ser definida em todos os reais ($\mathbb{R}$) e não somente nos valores utilizados na tabela.

2º exemplo: Vamos construir o gráfico da função $f(x) = -x^2 - 2x$.

Solução: Atribuindo os mesmos valores habituais para x: -2, -1, 0, 1, 2, temos

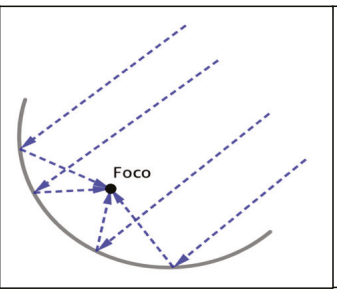
x	$-x^2 - 2x$	y
-2	$-(-2)^2 - 2.(-2) = -4 + 4$	0
-1	$-(-1)^2 - 2.(-1) = -1 + 2$	1
0	$-0^2 - 2.0 = 0 + 0$	0
1	$-1^2 - 2.1 = -1 - 2$	-3
2	$-2^2 - 2.2 = -4 - 4$	-8
-4	$-(-4)^2 - 2.(-4) = -16 + 8$	-8



Observação: A última linha da tabela acima foi calculada apenas para visualizar a curvatura característica da parábola.

A curvatura em forma de parábola caracterizada pelo gráfico de uma função quadrática, está presente no nosso cotidiano e possui importantes aplicações. Entre as aplicações podemos citar a propriedade receptora e refletora, o foco e a altura máxima, cujas ilustrações estão a seguir.

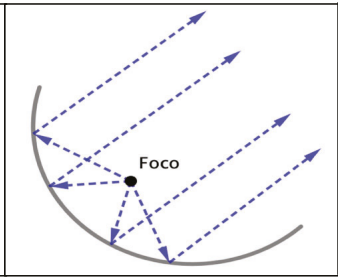




As antenas parabólicas possuem elevada capacidade de recepção de sinal devido a concentração de diversos sinais (ondas eletromagnéticas) em um único ponto (no foco do paraboloide).

Pixabay.com

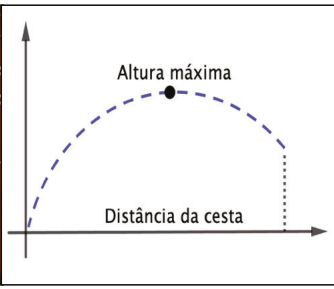




Os raios de luz emitidos pela lâmpada (que está no foco) são refletidos pela curvatura espelhada em forma de paraboloide presente na lanterna, aumentando assim, a intensidade de luz.

Pixabay.com-adaptado





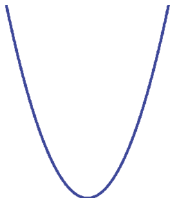
A trajetória de uma bola de basquete em direção a cesta, pode ser descrita por uma parábola.

Outros elementos importantes dessa curvatura serão vistos nos tópicos seguintes, e outros mais, em geometria analítica nas subseções 13.6.3 e 13.6.4 (volume 2).

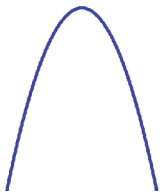
Algumas características dessa curvatura podem ser verificadas antecipadamente, sem a necessidade da construção do gráfico, como é o caso da concavidade anunciada no teorema a seguir.

Teorema 7.2.1: Seja uma função quadrática $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$:

Se $a > 0$ (positivo), a parábola tem a concavidade voltada para cima:



Se $a < 0$ (negativo), a parábola tem a concavidade voltada para baixo:



A demonstração desse teorema está na seção 7.4.

Para constatar essa informação, veja que a concavidade da parábola do primeiro exemplo está para cima, pois o coeficiente a da função $f(x) = x^2 - 5x + 6$, é 1 (positivo). E que a concavidade da parábola do segundo exemplo, está para baixo, pois o coeficiente a da função $f(x) = -x^2 - 2x$, é -1 (negativo).

SAIBA MAIS!

No caso da função quadrática só existem dois sentidos de concavidade: ***para cima ou para baixo****. Porém, existem parábolas com sentido de concavidade para esquerda, para direita ou em qualquer outro sentido, conforme subseção 13.6.3 – volume 2, que estudaremos em geometria analítica.*

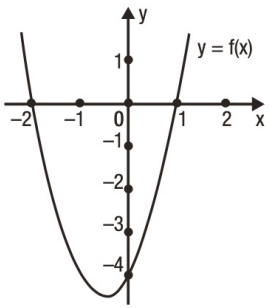
EXERCÍCIOS 7.1

1)Construa o gráfico das seguintes funções quadráticas:

a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$
b) $g(x) = -x^2 - x + 2$
c) $h(x) = x^2 + x + 1$
d) $i(x) = -x^2 - 5x$
e) $j(x) = -x^2 - 4$
f) $k(x) = x^2$

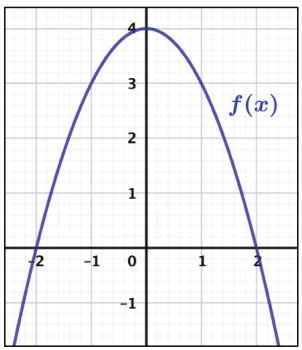
2) (UNESP – SP) A expressão que define a função quadrática $f(x)$, cujo gráfico está esboçado, é:

a) $f(x) = -2x^2 - 2x + 4$
b) $f(x) = x^2 + 2x - 4$
c) $f(x) = x^2 + x - 2$
d) $f(x) = 2x^2 + 2x - 4$
e) $f(x) = 2x^2 + 2x - 2$



3) A função que representa o gráfico da função $f(x)$ a seguir é:

a) $f(x) = -x^2 - 4x + 4$
b) $f(x) = x^2 + 4x - 4$
c) $f(x) = -x^2 + 4$
d) $f(x) = x^2 - 4$
e) $f(x) = -x^2 - 2x + 2$



7.3. Zero da função quadrática

Definição 7.3.1: Chama-se zeros da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, os números reais x, tais que $f(x) = 0$.

De outra forma, os zeros da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são as soluções da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, pelas quais são dadas pela fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Fazendo $\Delta = b^2 - 4ac$, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Como: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, usaremos a notação x' ("xis linha") e x'' ("xis duas linhas"), para diferenciar os dois possíveis zeros da função.

Erroneamente alguns livros didáticos (somente os brasileiros) atribuem essa fórmula de cálculo de zeros de uma função quadrática, ao matemático hindu Bháskara (1114-1185). No entanto, a utilização de fórmulas na Matemática surgiu somente 400 anos depois de sua morte. Dessa forma, não poderia ele ter descoberto fórmula alguma. Além disso, registros históricos revelam que os babilônicos e os indianos já sabiam resolver as equações quadráticas da forma $ax^2 + bx = c$, utilizando a regra a seguir (já que fórmulas ainda não eram utilizadas na Matemática):

"Multiplique ambos os membros da equação pelo número que vale quatro vezes o coeficiente do quadrado e some a eles um número igual ao quadrado do coeficiente original da incógnita. A solução desejada é a raiz quadrada disso"

Veja essa regra usando a simbologia atual e usando o coeficiente c na sua posição atual:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (\times 4a)(multiplicando\ tudo\ por\ 4a)$$

$$4a^{2x^2} + 4abx + 4ac = 0 \quad (somando\ b^2 em\ ambos\ os\ membros)$$

$$4a^{2x^2} + 4abx + 4ac + b^2 = 0 + b^2\ (organizando\ o\ produto\ notável)$$

$$\underbrace{4a^2x^2 + 4abx + b^2}_{(2ax+\,b)^2} + 4ac = b^2 \Rightarrow$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac \quad \Rightarrow \quad \boxed{2ax + b = \pm\sqrt{\Delta}}\ (*)$$

Isolando x, encontramos $\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$.

O método acima não só nos leva a demonstração da fórmula, como também mostra que é possível resolver uma equação do 2º grau sem o uso dela. Veja no 1º exemplo a seguir.

Teorema 7.3.1: A quantidade de zeros de uma função quadrática depende do

valor obtido para o radicando Δ (letra grega: delta), chamado de discriminante. A saber:

• Quando Δ é positivo($\Delta > 0$), há dois zeros reais e distintos e a parábola intersecta o eixo x em dois pontos;

• Quando Δ é zero ($\Delta = 0$), há só um zero real e a parábola intersecta o eixo x em um único ponto;

• Quando Δ é negativo($\Delta < 0$), não há zeros e a parábola não intersecta o eixo x.

Demonstração: Analisando a equação $(*)$, vemos que para: $\Delta > 0$ há duas soluções, para $\Delta = 0$, uma única solução e para $\Delta < 0$, não existe solução. O que demonstra o teorema.

Teorema 7.3.2: A parábola intersecta o eixo y somente em um ponto, cujo valor é o coeficiente c.

Demonstração: Para qualquer ponto sobre o eixo y, o valor de x é sempre zero. Então, sendo $f(x) = ax^2 + bx + c$, para $x = 0$, temos: $f(0) = a.0^2 + b.0 + c = c$.

1º exemplo: Vamos calcular os zeros da função $f(x) = x^2 - 3x + 2$ e verificar outras informações em relação ao seu gráfico.

Solução:

Fazendo $f(x) = 0$, temos: $0 = x^2 - 3x + 2$.

$x^2 - 3x + 2 = 0$ $(a = 1, b = -3 \; e \; c = 2)$

$\Delta = b^2 - 4.a.c = (-3)^2 - 4.1.2 = 9 - 8 \Rightarrow \boxed{\Delta = 1}$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2.1} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} x' = \dfrac{3 + 1}{2} = 2. \\ x'' = \dfrac{3 - 1}{2} = 1. \end{cases}$$

Como era de se esperar, o gráfico dessa função é uma parábola com concavidade para cima, pois $a = 1 > 0$ (positivo). Que intersecta o eixo x em dois pontos de abscissas 1 e 2 (neste caso, porque $\Delta > 0$) e intersecta o eixo y no ponto $c = 2$. Veja na figura 7.3.1.

Outra solução (sem o uso de fórmulas):

$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad (\underbrace{\times 4}_{4a}) \quad \Rightarrow$

$4x^2 - 12x + 8 = 0 \quad (\underbrace{+9}_{b^2}$ em cada membro$) \Rightarrow$

$4x^2 - 12x + 8 + 9 = 9 \Rightarrow \underbrace{4x^2 - 12x + 9}_{(2x-3)^2} = 9 - 8 \Rightarrow$

$(2x - 3)^2 = 1 \quad \Rightarrow 2x - 3 = \pm\sqrt{1} \Rightarrow$

$$2x = 3 \pm 1 \Rightarrow 2x = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{3 + 1}{2} = 2. \\ x'' = \dfrac{3 - 1}{2} = 1. \end{cases}$$

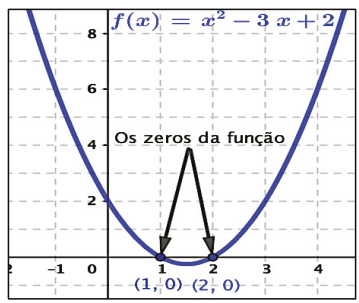


Figura 7.3.1

A solução anterior exige domínio matemático sobre produtos notáveis, em caso de dificuldades, o uso da fórmula é o mais indicado.

2º exemplo: Calcule os zeros da função $f(x) = x^2 - 6x + 9$.

Solução:

Fazendo $f(x) = 0$, temos:

$0 = x^2 - 6x + 9$

$x^2 - 6x + 9 = 0$ $(a = 1, b = -6\ e\ c = 9)$

$\Delta = b^2 - 4.a.c$

$\Delta = (-6)^2 - 4.1.9$

$\Delta = 36 - 36$

$\boxed{\Delta = 0}$.

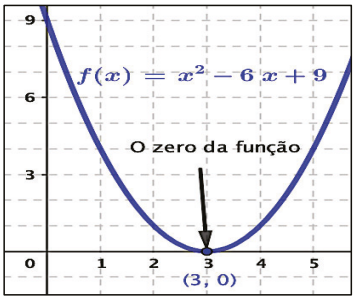


Figura 7.3.2

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{0}}{2.1} = \frac{6 \pm 0}{2} = \begin{cases} x' = \frac{6+0}{2} = 3. \\ x'' = \frac{6-0}{2} = 3. \end{cases}$$

Tente resolver sem o uso da fórmula.

Observe na figura 7.3.2 que a parábola tem concavidade para cima, pois $a = 1 > 0$ (positivo). Intersecta o eixo x em um único ponto $x = 3$ (neste caso, porque $\Delta = 0$) e intersecta o eixo y em $c = 9$.

3º exemplo: Calcule os zeros da função $f(x) = -3x^2 - 5x - 12$.

Solução:

Fazendo $f(x) = 0$, temos:

$0 = -3x^2 - 5x - 12.$

$-3x^2 - 5x - 12 = 0$ $(a = -3, b = -5\ e\ c = -12)$

$\Delta = b^2 - 4.a.c$

$\Delta = (-5)^2 - 4.(-3).(-12)$

$\Delta = 25 - 144$

$\boxed{\Delta = -119}$.

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{-119}}{2.(-3)}$.

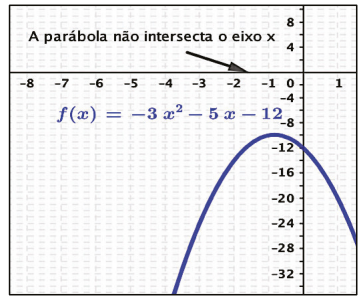


Figura 7.3.3

Esse é o caso em que $\Delta < 0$. Como não existe raiz quadrada de número negativo em $\mathbb{R}$, a função não possui zeros reais e a parábola não intersecta o eixo x. Além disso, possui concavidade para baixo, pois $a = -3 < 0$ (negativo) e intersecta o eixo y no ponto de ordenada c:(0, -12). O gráfico dessa função está na figura 7.3.3.

4º exemplo (quando $b = 0$): Calcule os zeros da função $f(x) = 2x^2 - 18$.

Solução: Quando $b = 0$, podemos calcular os zeros sem o uso da fórmula.

$$2x^2 - 18 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = \frac{18}{2} \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow \begin{cases} x' = +3. \\ x'' = -3. \end{cases}$$

5º exemplo (quando $c = 0$): Calcule os zeros da função $f(x) = x^2 + 5x$.

Solução: Quando $c = 0$, também podemos calcular os zeros sem o uso da fórmula.

$$x^2 + 5x = 0 \Rightarrow x(x+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x' = 0. \\ x'' = -5. \end{cases}$$

Use a fórmula no 4º e 5º exemplo, e confirme os valores dos zeros da função.

6º exemplo: Qual o valor de p na função $f(x) = 3x^2 - px + 12$, para que tenha apenas um zero?

Solução:

Para a função ter apenas um zero, o discriminante Δ precisa ser igual à zero. Assim:

$$\Delta = b^2 - 4.a.c \Rightarrow \Delta = (-p)^2 - 4.3.12 \Rightarrow$$

$$\Delta = p^2 - 144 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow p^2 - 144 = 0 \Rightarrow p = \pm\sqrt{144} \Rightarrow \boxed{p = \pm 12}.$$

EXERCÍCIOS 7.2

1)Calcule os zeros das seguintes funções:

a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

b) $g(x) = -2x^2 + 7x - 5$

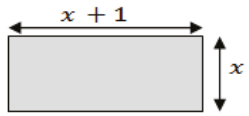
c) $h(x) = x^2 + 2x + 10$

d) $i(x) = x^2 - 13x + 22$

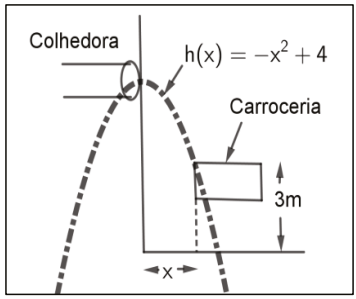
e) $j(x) = -x^2 - 12x$

f) $k(x) = 3x^2 - 48$

2) Em um terreno retangular, um lado é 1 metro maior que o outro. Sabendo que sua área é 90m², qual o seu perímetro?



3) Uma colhedora despeja em um caminhão grãos de milho segunda a função $h(x) = -x^2 + 4$. Onde h é a altura dos grãos e x é a distância alcançada pelos grãos. Desprezando o vento e outras condicionantes, qual a distância máxima (x) a colhedora precisa estar da carroceria de um caminhão, de 3 metros de altura, para não haver perdas de grãos?



4)A função $A(p) = 5p^2 - 15p$ indica a concentração A de alumínio (mg/kg) em uma espécie de planta em função do acúmulo de fósforo p (mg/kg) no solo. Quais os valores do fósforo para uma concentração de alumínio zero?

5)Um fazendeiro pretende plantar e cercar um terreno quadrado de lado x. Para isso recebeu duas propostas: A empresa ***A*** cobrou R$ 5,00 por metro quadrado de plantio, R$ 7,00 por metro linear de cerca, mais R$ 200,00 para despesas administrativas eventuais. Enquanto que a empresa ***B*** cobrou R$ 7,00 por metro quadrado de plantio, R$ 4,00 por metro linear de cerca, mais R$ 210,00 para despesas administrativas eventuais.

a) Para um terreno de 100 metros de lado, qual empresa é mais vantajosa para o fazendeiro?

b) Para que valor de x as duas empresas tem mesmo custo?

6) A Figura a seguir é uma ilustração da tendência de disponibilidade de vários nutrientes às plantas em relação ao pH do solo.

Seja a função $D(p) = -2p^2 + 35p - 105$ uma aproximação dos nutrientes Nitrogênio, Enxofre e Boro (N, S e B). Qual a disponibilidade desses nutrientes para o pH 6,5?

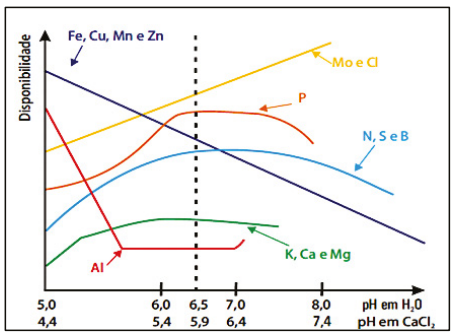


Imagem da fonte

Fonte: (EMBRAPA, 2018)

7) O gráfico a seguir mostra a relação das alfafas adubadas com nitrogênio, proteína bruta e sua a matéria seca.

Considerando as funções no gráfico para a proteína bruta $y(x) = 0{,}0002x^2 - 0{,}02x + 27{,}08$ e $y(x) = 0{,}004x + 27{,}06$, quais as coordenadas do ponto A e B (pontos de encontro da reta com a parábola)?

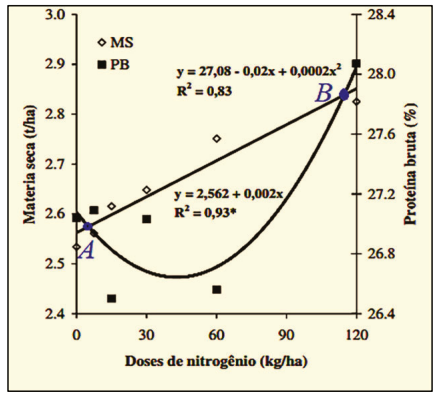


Imagem adaptada da fonte

Fonte: (MOREIRA, BERNARDI e RASSINI, 2008)

7.4. Forma canônica e vértices

Definição 7.4.1: Denominamos de **forma canônica**, a função quadrática escrita na forma:

$$y = a(x - x_v)^2 + y_v$$ Onde: $$x_v = -\frac{b}{2a}$$ $$y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

O ponto (x_v, y_v), calculado a partir da fórmula acima, é denominado de vértice da parábola.

Teorema 7.4.1: O vértice da parábola representada pela função $y = ax^2 + bx + c$, é o valor máximo y da função, se $a < 0$ e mínimo, se $a > 0$.

Demonstração:

$$y = ax^2 + bx + c \ (\times 4a)(multiplicando\ tudo\ por\ 4a)$$

$$4ay = 4a^2x^2 + 4abx + 4ac\ (somando\ b^2 em\ ambos\ os\ membros)$$

$$4ay + b^2 = 4a^{2x^2} + 4abx + 4ac + b^2\ (organizando\ o\ produto\ notável)$$

$$4ay + b^2 = \underbrace{4a^2x^2 + 4abx + b^2}_{(2ax+b)^2} + 4ac = (2ax + b)^2 + 4ac - b^2$$

$$y = \frac{(2ax + b)^2}{4a} - \frac{\Delta}{4a} = \frac{a(2ax + b)^2}{4a^2} - \frac{\Delta}{4a} \Rightarrow$$

$$y = a\left(x - \underbrace{\left(\frac{-b}{2a}\right)}_{x_v}\right)^2 + \underbrace{\left(-\frac{\Delta}{4a}\right)}_{y_v} \Rightarrow \boxed{y = a(x - x_v)^2 + y_v}\ (1)$$

Dado que na forma canônica (1) acima, a expressão $(x - x_v)^2$ é sempre positiva, o valor máximo ou mínimo de y depende do sinal do coeficiente a, pois:

- Para $a > 0$ (concavidade da parábola para cima), o valor de $y = \overbrace{\underbrace{a}_{+}\underbrace{(x - x_v)^2}_{+}}^{acréscimo} + y_v$ será mínimo quando $x = x_v$ e esse valor é o y_v. Basta observar os acréscimos sempre positivos sobre y_v.

- Para $a < 0$ (concavidade da parábola para baixo), o valor de $y = \overbrace{\underbrace{a}_{-}\underbrace{(x - x_v)^2}_{+}}^{acréscimo} + y_v$ será máximo quando $x = x_v$ e esse valor é o y_v. Perceba os acréscimos sempre negativos sobre y_v.

Outras informações: Isolando o valor de x em (1), temos

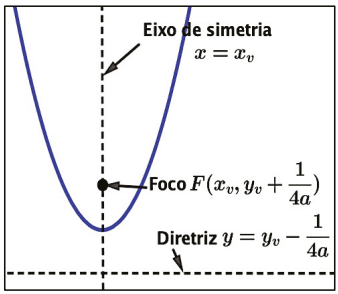
$$x = x_v \pm \sqrt{\frac{y - y_v}{a}}.$$

- Para $y \neq y_v$, existem dois valores de x que são simétricos (ou equidistantes)

a x_v. O que demonstra o eixo de simetria da parábola em torno de x_v.

♦ Se $a > 0$, implica em $y > y_v$. Assim, para $x > x_v$, a função é crescente e caso, $x < x_v$, função é decrescente. De forma análoga, demonstra-se para $a < 0$.

Outros detalhes e demonstrações, como a propriedade receptora e refletora, veremos em geometria analítica no estudo de parábolas (subseção 13.6.4 – volume 2). Dentro os detalhes, vale mencionar que a função quadrática é uma parábola com foco no ponto $F = \left(x_v, y_v + \frac{1}{4a}\right)$ e diretriz dada pela reta horizontal $y = y_v - \frac{1}{4a}$, conforme a figura ao lado.



Uma vez demonstradas todas as informações, vamos resumi-las:

Nos casos em que $a > 0$, temos que:

- A função é decrescente para $x < x_v$ e crescente para $x > x_v$;
- Se $\Delta > 0$, a função $f(x)$ é positiva em qualquer intervalo e negativa somente entre os zeros da função (x' e x'') – ver figura 7.4.1;
- Se $\Delta = 0$, a função $f(x)$ é positiva em qualquer intervalo e igual a zero somente no zero da função ($x' = x''$) – ver figura 7.4.2;
- Se $\Delta < 0$, a função $f(x)$ é positiva em qualquer intervalo (não existe zeros da função) – ver figura 7.4.3.

Nos casos em que $a < 0$, temos que:

- A função é decrescente para $x > x_v$ e crescente para $x < x_v$;
- Se $\Delta > 0$, a função $f(x)$ é negativa em qualquer intervalo e positiva somente entre os zeros da função (x' e x'') – ver figura 7.4.4;
- Se $\Delta = 0$, a função $f(x)$ é negativa em qualquer intervalo e igual a zero somente no zero da função ($x' = x''$) – ver figura 7.4.5;
- Se $\Delta < 0$, a função $f(x)$ é negativa em qualquer intervalo (não existe zeros da função) – ver figura 7.4.6.

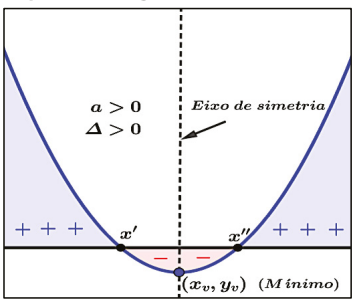


Figura 7.4.1

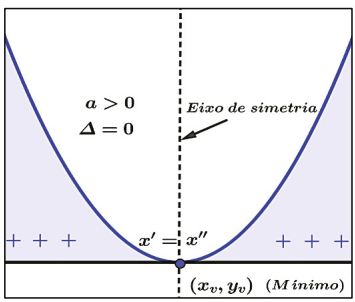


Figura 7.4.2

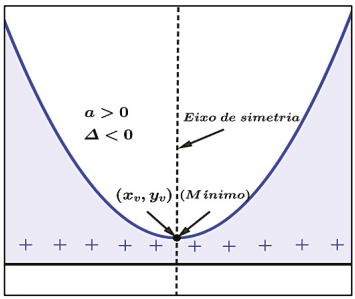


Figura 7.4.3

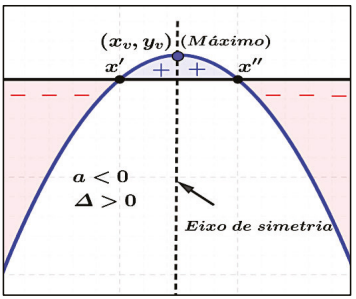


Figura 7.4.4

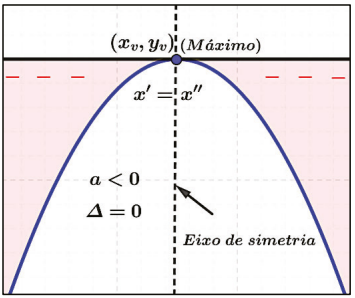


Figura 7.4.5

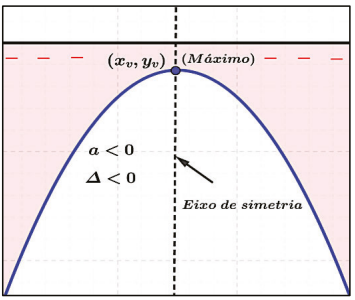


Figura 7.4.6

1º exemplo: Seja a função $g(x) = (x-4)^2 - 1$.

a) Quais as coordenadas do ponto mínimo da função?

Solução: Como a função $g(x) = (x-4)^2 - 1$ está na forma canônica $y = a(x - x_v)^2 + y_v$, o ponto mínimo $(4, -1)$ está explícito. Entretanto, para fins didáticos, faremos o desenvolvimento da função e aplicaremos as fórmulas tradicionais do vértice.

$$(x-4)^2 - 1 = (x^2 - 8x + 16) - 1 = x^2 - 8x + 15 \Rightarrow a = 1, b = -8 \; e \; c = 15$$

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-8)}{2.1} = 4.$$

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(b^2 - 4.a.c)}{4a} = \frac{-((-8)^2 - 4.1.15)}{4.1} = \frac{-(64-60)}{4} = -1.$$

Portanto, o ponto mínimo é $\boxed{(4, -1)}$.

b) Qual o ponto em que a parábola intersecta o eixo y?

Solução: A parábola intersecta o eixo y sempre no ponto $(0, c)$, ou seja, em $(0, 15)$.

c) Quais os zeros da função?

Solução: A forma canônica também nos fornece o cálculo dos zeros da função de forma direta, sem uso da fórmula. Veja:

$$g(x) = (x-4)^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad 0 = (x-4)^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad (x-4)^2 = 1 \quad \Rightarrow$$

$$x - 4 = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x' = 4 + 1 = 5. \\ x'' = 4 - 1 = 3. \end{cases}$$

Use a fórmula e comprove!

d)Quais os intervalos de crescimento, decrescimento, para função positiva e função negativa?

Solução: Já que a concavidade está para cima (a é positivo):

- A função é decrescente para $x < 4$;
- A função é crescente para $x > 4$;
- A função é positiva para $x < 3$ e $x > 5$;
- A função é negativa para $3 < x < 5$.

Conforme o gráfico dessa função na figura 7.4.7.

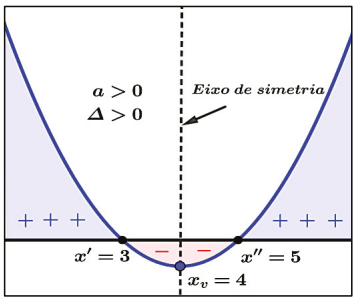


Figura 7.4.7

2º exemplo: Sendo $y = 3x^2 - 18x - 50$, calcule o ponto mínimo da função.

Solução:

Como $a = 3, b = -18$ e $c = -50$, temos

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-18)}{2.3} = \frac{18}{6} \Rightarrow \boxed{x_v = 3}.$$

$$y_v = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-((-18)^2 - 4.3.(-50))}{4.3} \Rightarrow$$

$$y_v = \frac{-(324 + 600)}{12} = \frac{-924}{12} \Rightarrow \boxed{y_v = -77}.$$

Resposta: $(3, -77)$.

Conforme o gráfico dessa função na figura 7.4.8.

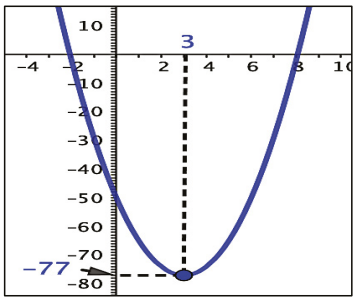


Figura 7.4.8

3º exemplo: A torta é o principal subproduto da cadeia produtiva da mamona, produzida a partir da extração do óleo das sementes. Este subproduto apresenta-se como excelente fonte de nitrogênio. Alguns estudos já demonstraram a rapidez com que à torta de mamona mineraliza-se e, consequentemente, disponibiliza seus nutrientes. Em um trabalho desenvolvido em condições de campo em Mossoró-RN, contatou-se que o diâmetro caulinar das duas cultivares de mamona avaliadas (Energia e Guarany), aumentou em função das doses de torta de mamona aplicadas, segundo o gráfico na figura.

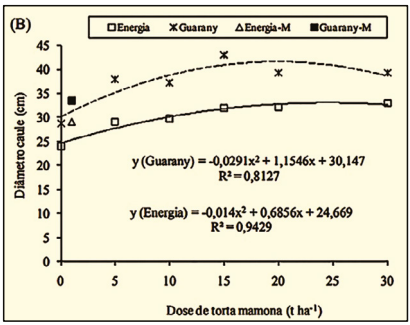


Imagem da fonte

Fonte: (FILHO, OLIVEIRA, *et al.*, 2010)

Considerando a $y_{Guarany} = -0{,}03x^2 + x + 30$. Qual o maior diâmetro do caule avaliado? Para que dose de torta de mamona esse diâmetro é máximo?

Solução: $a = -0{,}03, b = 1\ e\ c = 30.$

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(b^2 - 4.a.c)}{4a} = \frac{-(1^2 - 4.(-0{,}03).30)}{4.(-0{,}03} \Rightarrow$$

$$y_v = \frac{-(1+3{,}6)}{4.(-0{,}03} = \frac{-4{,}6}{-0{,}12} \cong 38{,}34 \Rightarrow \boxed{y_v \cong 38{,}34}.$$

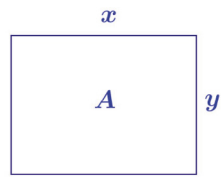
Resposta: maior diâmetro foi de 38,34 cm.

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2.(-0{,}03)} = \frac{1}{0{,}06} \cong 16{,}67 \Rightarrow \boxed{x_v \cong 16{,}67}.$$

Resposta: para uma dose de 16,67 t.ha^{-1}, obtemos um diâmetro do caule máximo.

4º exemplo: Um avicultor pretende cercar uma área retangular com 64m de arame entrelaçado. Que medidas precisa ter esse retângulo para que a área comporte o maior número de aves possível?

Solução: Denominando os lados do retângulo como x e y, conforme a figura a seguir, temos



$$2x + 2y = 64 \Rightarrow \boxed{y = \frac{64 - 2x}{2}} (1)$$

A área do retângulo é dado por $A = x.y$. Substituindo, obtemos

$$A = x\ (64 - 2x)/2 \Rightarrow \boxed{A = 32x - x^2}$$

Cujos coeficientes são: $a = -1, b = 32\ e\ c = 0.$

A área A é uma função quadrática com $a < 0$. Portanto, possui concavidade para baixo e um valor máximo. E o ponto de x para que a área A seja máxima é

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-32}{2.(-1)} \Rightarrow \boxed{x_v = 16}.$$

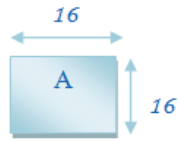
Substituindo em (1), encontramos

$$y = \frac{64 - 2x}{2} = \frac{64 - 2.16}{2} = \frac{64 - 32}{2} = \frac{32}{2} \Rightarrow \boxed{y = 16}.$$

Desse modo, o retângulo que possui área máxima é um quadrado de lado 16.

$$A_{máx} = 16.16 \Rightarrow \boxed{A_{máx} = 256m^2}$$

Que pode ser calculada também, usando $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$ (Calcule!).



5º exemplo: Um aspersor precisa atingir a distância máxima de 10 metros e altura máxima de 2,5 metros. Supondo sua instalação na origem de um sistema cartesiano (ver figura 7.4.9), qual a função quadrática que deve representar o jato d'agua desse aspersor?

Solução: De acordo com a figura $x_v = 5$, $y_v = 2{,}5$ e os zeros da função são respectivamente 0 (origem do sistema, $c = 0$) e 10 (distância máxima - toca o chão). Assim

$$x_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow 5 = \frac{-b}{2a} \Rightarrow \boxed{b = -10a} \quad (1)$$

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(b^2 - 4.a.0)}{4a} \Rightarrow$$

$$y_v = \frac{-b^2}{4a} \Rightarrow \boxed{2{,}5 = \frac{-b^2}{4a}} \quad (2)$$

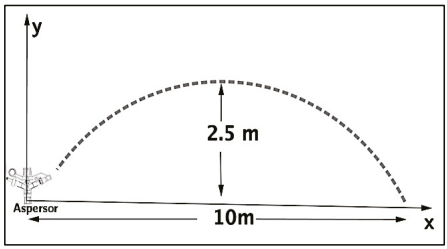


Figura 7.4.9

Substituindo (1) em (2), encontramos

$$2{,}5 = \frac{-(-10a)^2}{4a} \Rightarrow 2{,}5 = \frac{-100a^2}{4a} \Rightarrow 2{,}5 = -25a \Rightarrow a = \frac{2{,}5}{-25} \Rightarrow \boxed{a = -0{,}1}.$$

De (1), obtemos

$$b = -10a \Rightarrow b = -10.(-0{,}1) \Rightarrow \boxed{b = 1}.$$

Logo, o jato d'agua do aspersor é representado pela função: $\boxed{f(x) = -0{,}1x^2 + x}$.

6º exemplo: Construa o gráfico da função $f(x) = x^2 - 7x + 10$, usando os pontos notáveis da parábola: zeros, vértice e o ponto c.

Solução: O roteiro a seguir ajuda a construir o gráfico calculando apenas os pontos notáveis da parábola (pontos conhecidos que podem ser calculados). Acompanhe os passos.

1º - Calcular os zeros da função.

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow (a = 1, b = -7 \; e \; c = 10)$$

$$\Delta = b^2 - 4.a.c = (-7)^2 - 4.1.10 = 49 - 40 \Rightarrow \boxed{\Delta = 9}.$$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{9}}{2.1} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} x' = \dfrac{7+3}{2} = 5. \\ x'' = \dfrac{7-3}{2} = 2. \end{cases}$$

Marcar os pontos $x = 2$ e $x = 5$, sobre o eixo x.

2º- Calcular os vértices (máximo ou mínimo).

$$\left.\begin{aligned} x_v &= \frac{-b}{2a} = \frac{-(-7)}{2.1} = \frac{7}{2} \\ y_v &= \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-9}{4.1} = \frac{-9}{4} \end{aligned}\right\} V = \left(\frac{7}{2}, -\frac{9}{4}\right)$$

3º - Marcar o ponto $c = 10$ no gráfico.

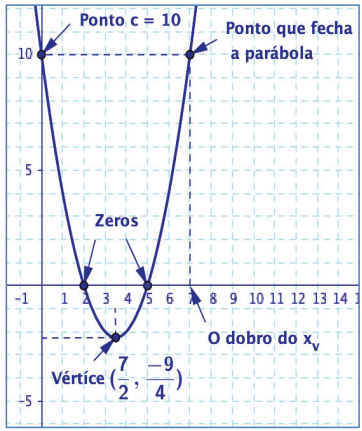


Figura 7.4.10

4º - Marcar o ponto na direção do coeficiente c, neste caso, ele "fecha" a parábola. Esse ponto tem sempre como abscissa o dobro do x_v (conforme o teorema 7.5.1 a seguir). Para este exemplo o dobro de $\frac{7}{2}$ é 7. Marcar o ponto (7,10). Traçar o gráfico.

7.5. Teoremas e informações complementares

Teorema 7.5.1 (abscissa de c): Os pontos da parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$, de ordenadas iguais a c, possuem abscissas $x = 0$ e/ou $x = \frac{-b}{a}$ (o dobro do x_v).

Demonstração: Fazendo $y = c$, na expressão $y = ax^2 + bx + c$, temos

$$c = ax^2 + bx + c \Rightarrow ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \ (ok! \ eixo \ y). \\ x = \frac{-b}{a} \ (o \ dobro \ do \ x_v). \end{cases}$$

Teorema 7.5.2 (soma e produto dos zeros): Seja uma função quadrática na forma $y = ax^2 + bx + c$, a soma dos zeros da função é dada por $\frac{-b}{a}$ e o seu produto, por $\frac{c}{a}$.

Demonstração: $x' + x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$.

$x'.x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}$.

Teorema 7.5.3 (forma fatorada): Toda função quadrática na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ e de zeros x' e x'', pode ser escrita na forma fatorada: $f(x) = a(x - x')(x - x'')$.

Demonstração: $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x^2 + \underbrace{\frac{b}{a}}_{-(x'+x')}x + \underbrace{\frac{c}{a}}_{x'.x''}) \Rightarrow$

$f(x) = a(x^2 - x.(x' + x'') + x'.x') = \boxed{a(x - x')(x - x'')}$.

Importante observar nesses três teoremas, é que:

- O dobro do x_v equivale a soma $x' + x''$, ambos são iguais a $\frac{-b}{a}$. Veja no 6º exemplo anterior, que para encontrar o ponto na direção do coeficiente c, poderíamos ter somado os zeros da função: $x' + x'' = 2 + 5 = 7$, ao invés de fazer o dobro do x_v. O problema é que nem sempre existem os zeros reais na função (caso $\Delta<0$), mas sempre haverá coeficientes a e b reais para cálculo do $x_v = \frac{-b}{a}$.
- É possível calcular os zeros de uma função quadrática usando o teorema 7.4.2 – (soma e produto dos zeros). Relembrando o 6º exemplo anterior, quais dois números que somados dão $\frac{-b}{a} = \frac{-(-7)}{1} = 7$ e multiplicados dão $\frac{c}{a} = \frac{10}{1} = 10$? Resposta: 2 e 5 (são os zeros da função – verifique!)
- No 6º exemplo, temos: $a = 1$, $x' = 2$ e $x'' = 5$, aplicando do teorema 7.4.3 (forma fatorada): $a(x - x')(x - x'') = 1.(x - 2)(x - 5) \Rightarrow f(x) = x^2 - 7x + 10$, retornamos a função inicial.

EXERCÍCIOS 7.3

1)Calcule os zeros da função, o vértice da parábola e construa o gráfico (usando os pontos notáveis) das seguintes funções:

a) $f(x) = x^2 - 9x + 14$

b) $g(x) = -3x^2 + 7x - 4$

c) $h(x) = 5x^2 - x + 1$

d) $i(x) = (x+3)^2 - 1$

2)Calcule o ponto máximo ou mínimo das seguintes funções:

a) $f(x) = x^2 + x + 1$

b) $f(x) = x - 3x^2$

c) $f(x) = -x^2 + 9$

d) $f(x) = 8x - 5 + 2x^2$

3) (Marque V ou F) O que podemos afirmar em relação a função $f(x) = 4(x+2)^2 - 16$?

a) ( )Possui o 16 como valor máximo .

b) ( )Possui o 4 como abscissa do vértice.

c) ( )Possui o -16 como valor mínimo.

d) ( )Possui o -2 como abscissa do vértice.

e) ( )O gráfico da função é uma parábola com concavidade para cima.

f) ( )O gráfico da função é uma parábola com concavidade para baixo.

g) ( )O gráfico da função intersecta o eixo y no ponto (0, 0).

h) ( ) $x = -4$ e $x = 0$ são os zeros dessa função.

i) ( ) A função é crescente no intervalo $x > -2$.

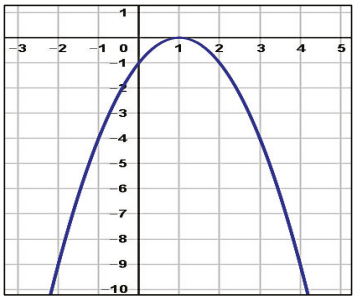
j) ( ) A função é negativa no intervalo $-4 < x < 0$.

4)(FGV) O custo para se produzir x unidades de um produto é dado por $C = 2x^2 + 100x + 5000$. O valor do custo mínimo é:

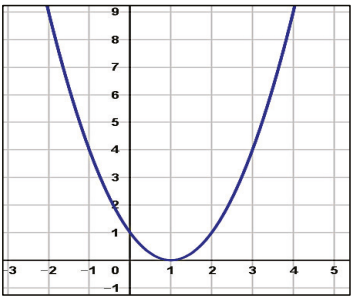
a) 3250. b) 3750. c)4000. d) 4500. e)4950.

5)Calcule a função que representa cada uma das seguintes parábolas:

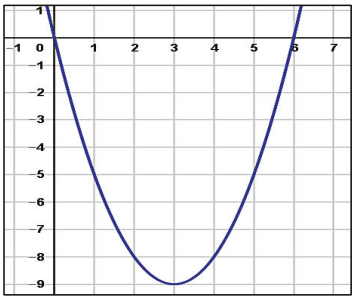
a)



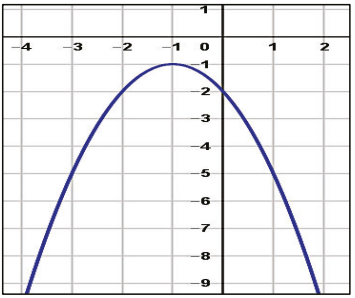
b)



c)



d)



6) O gráfico a seguir mostra a relação do efeito do pH do solo com teor de matéria seca sobre uma produção alfafa.

Considerando a função

$y = -2{,}36x^2 + 34{,}44x - 105{,}78$

Qual o teor máximo de matéria seca e para qual valor de pH esse teor máximo acontece?

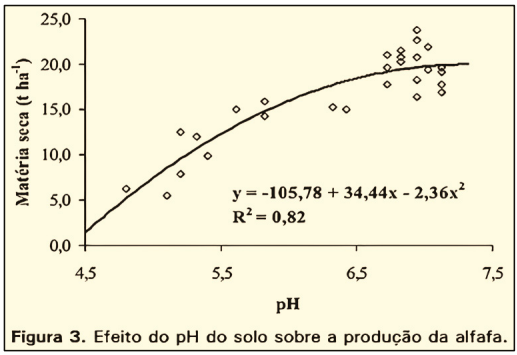


Figura 3. Efeito do pH do solo sobre a produção da alfafa.

Imagem da fonte

Fonte adaptada: (MOREIRA, BERNARDI e RASSINI, 2007)

7)(FGV) Uma parede de tijolos será usada para um dos lados de um curral retangular. Para os outros lados serão usados 400m de tela de arame, de modo a produzir a área máxima. Então o quociente de um lado pelo outro é:

a) 1 b) 0,5 c) 2,5 d) 3 e) 1,5

8)O jato em forma de parábola de um aspersor atinge distância máxima de 20m e altura máxima de 5m. Qual a função quadrática que representa o jato desse aspersor, considerando sua instalação na origem do sistema cartesiano?

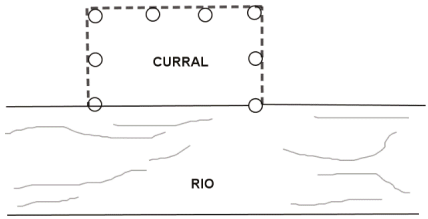
9) Alguns produtos como antenas parabólicas e lanternas, por exemplo, possuem superfície em forma de parábola, devido a sua propriedade refletora. Considere que a churrasqueira solar da imagem a sguir, foi construída segunda a parábola $f(x) = x^2 - 2x + 1$ (medidas em metros). Para que os raios solares sejam aproveitados ao máximo é preciso que o recipiente, onde será posto o alimento, fique exatamente no foco.

Se as coordenadas do foco de qualquer parábola na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ (com $\Delta = b^2 - 4ac$), são calculadas pela fórmula $F = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta+1}{4a}\right)$, a que distância do fundo da churrasqueira, o recipiente deve ficar posicionado?



Imagem de (TECHTUDO, 2011)

10)Um agricultor pretende cercar um curral retangular à beira de um rio, com 200m de arame. Se o lado comum ao rio não terá cerca, apenas os outros três lados, de que forma ele poderá cercar o curral para que sua área seja máxima?

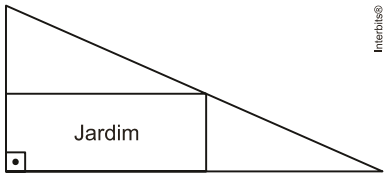


11)Uma feirante vende em média 30kg de mamão por dia quando o valor do quilograma é R$10,00. Experiências anteriores mostram que a cada R$1,00 de desconto no preço, há um aumento nas vendas de 5kg por dia. Qual deverá ser o preço do quilograma para que o faturamento dessa feirante seja máximo?

12)(UEG) Em um terreno, na forma de um triângulo retângulo, será construído um jardim retangular, conforme figura abaixo.

Sabendo-se que os dois menores lados do terreno medem 9 m e 4 m, as dimensões do jardim para que ele tenha a maior área possível, serão, respectivamente,

a) 2,0 m e 4,5 m.
b) 3,0 m e 4,0 m.
c) 3,5 m e 5,0 m.
d) 2,5 m e 7,0 m.



13)Um aspersor deverá ser instalado no chão de um terreno de forma que consiga molhar uma área de no mínimo 78,5 m² em sua volta. Sabendo que o aspersor funciona girando em torno do seu eixo e o jato d'água obedece a função $h = -x^2 + bx + c$, onde h é a altura e x é a distância de alcance do jato, qual deve ser a altura máxima de jato d'água para que o aspersor consiga molhar a área mínima? Use π=3,14.

14)Uma empresa especializada em escavação de viveiros para peixes, cobra R$ 36 por metro quadrado de superfície mais R$ 25,00 por metro linear de profundidade, por cada buraco cavado. Um piscicultor pretende contratar a empresa para cavar um viveiro em forma de paralelepípedo, com 9 metros de largura e com capacidade para 100mil litros. Quais as dimensões ideais desse viveiro para que o custo seja mínimo para o fazendeiro?

7.6. Taxas de variação e a função quadrática

Já sabemos da unidade 6, que a taxa de variação de qualquer função é calculada por $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$ e que, no caso da função afim $f(x) = ax + b$, essa taxa de variação é constante, sendo o próprio coeficiente a da função. Nesse tópico, verificaremos a relação entre a função quadrática e as taxas de variação da função.

Teorema 7.6.1 (Caracterização das funções quadráticas): Para que uma função contínua $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja uma função quadrática é necessário e suficiente que toda progressão aritmética não-constante seja transformada por f numa progressão aritmética de segunda ordem[10] não degenerada.

Demonstração: Consideremos $n+1$ pontos $(x_{n+1}, x_n, x_{n-1}, \dots, x_2, x_1)$ que se ajustam à uma função quadrática na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, que geram as seguintes imagens, respectivamente, $(y_{n+1}, y_n, y_{n-1}, \dots, y_2, y_1)$.

Uma progressão aritmética de segunda ordem é uma sequência em que as diferenças entre os termos formam uma progressão aritmética. Desse modo, vamos subtrair as imagens da função

$$y_{n+1} - y_n = a{x_{n+1}}^2 + bx_{n+1} + c - (a{x_n}^2 + bx_n + c) = a({x_{n+1}}^2 - {x_n}^2) + b(x_{n+1} - x_n)$$

$$y_n - y_{n-1} = ax_n^2 + bx_n + c - (ax_{n-1}^2 + bx_{n-1} + c) = a(x_n^2 - x_{n-1}^2) + b(x_n - x_{n-1})$$

$$y_{n-1} - y_{n-2} = a({x_{n-1}}^2 - {x_{n-2}}^2) + b(x_{n-1} - x_{n-2})$$

$$\vdots$$

$$y_2 - y_1 = a({x_2}^2 - {x_1}^2) + b(x_2 - x_1).$$

E em seguida, basta provar que

$$a({x_{n+1}}^2 - {x_n}^2) + b(x_{n+1} - x_n) - [a(x_n^2 - x_{n-1}^2) + b(x_n - x_{n-1})] \quad (1)$$

é igual a

$$a({x_n}^2 - {x_{n-1}}^2) + b(x_n - x_{n-1}) - [a(x_{n-1}^2 - x_{n-2}^2) + b(x_{n-1} - x_{n-2})] \quad (2).$$

Com efeito, se as abscissas estão em P.A de razão r, então

$$x_{n+1} - x_n = x_n - x_{n-1} = x_{n-1} - x_{n-2} = r \quad (3).$$

Substituindo (3) em (1), obtemos

$$a({x_{n+1}}^2 - {x_n}^2) + b\cancel{(x_{n+1} - x_n)} - [a({x_n}^2 - {x_{n-1}}^2) + b\cancel{(x_{n+1} - x_b)}]$$

$$a\underbrace{(x_{n+1} - x_n)}_{r}(x_{n+1} + x_n) - a\underbrace{(x_n - x_{n-1})}_{r}(x_n + x_{n-1}) \Rightarrow$$

$$ar.[\underbrace{(x_{n+1} - x_n)}_{r} + \underbrace{(x_n - x_{n-1})}_{r}] = 2ar^2.$$

E seguindo os mesmos passos, conclui-se que a expressão (2) também é $2ar^2$, mostrando que as ordenadas formam uma progressão aritmética (P.A) de segunda ordem e suas diferenças, uma P.A de razão $2ar^2$. Isto é

[10] Progressão aritmética de segunda ordem é uma sequência em que as diferenças sucessivas entre os seus termos formam uma P.A usual.

$$\boxed{y_{n+1} - y_n - (y_n - y_{n-1}) = y_n - y_{n-1} - (y_{n-1} - y_{n-2}) = 2ar^2} \quad (4)\,.$$

Demonstrada a necessidade, vamos agora comprovar a suficiência.

Consideremos a sequência em que $(y_{n+1},\ y_n,\ y_{n-1},\ \ldots\ ,\ y_2,\ y_1)$ é uma P.A de segunda ordem. Assim, as diferenças entre os termos formam uma P.A de razão r':

$$y_{n+1} - y_n = p + (n-1).r' \ (5).$$

Além disso, podemos escrever y_{n+1} como

$$y_{n+1} = (y_{n+1} - y_n) + (y_n - y_{n-1}) + (y_{n-1} - y_{n-2}) + \cdots + (y_3 - y_2) + y_2 + y_1$$

$$y_{n+1} = (p + (n-1).r') + (p + (n-2).r') + (p + (n-3).r') + \cdots + p + r' + p + y_1$$

$$y_{n+1} = np + \frac{n(n-1)r'}{2} + y_1 \ (6).$$

Substituindo (6) em (5), encontramos

$$y_{n+1} - y_n = p + (n-1).r' \ \Rightarrow np + \frac{n(n-1)r'}{2} + y_1 - y_n = p + (n-1).r' \Rightarrow$$

$$\boxed{y_n = \underbrace{\frac{r'}{2}}_{a'} n^2 + \underbrace{(p - \frac{3r'}{2})}_{b'} n + \underbrace{r' - p + y_1}_{c'}}. \quad (7)$$

Como n representa a posição do termo, inferimos que a função que transforma a P.A (1, 2, 3, 4,..., n) em uma P.A de segunda ordem, é uma função quadrática. E a partir dessa P.A posicional, podemos escrever qualquer outra P.A, fazendo

$$x_n = m.n + z \Rightarrow\ n = \frac{x_n - z}{m}.$$

E substituindo em (7), dispomos de

$$y_n = \underbrace{\frac{r'}{2}}_{a'}\left(\frac{x_n - z}{m}\right)^2 + \underbrace{(p - \frac{3r'}{2})}_{b'}.\left(\frac{x_n - z}{m}\right)^2 + \underbrace{r' - p + y_1}_{c'} \Rightarrow$$

$$\boxed{y_n = \underbrace{\left(\frac{a'}{m^2}\right)}_{a} {x_n}^2 + \underbrace{\left(\frac{b'}{m} - \frac{2.a'.z}{m^2}\right)}_{b} x_n + \underbrace{c' + \frac{a'.z^2}{m^2} - \frac{b'.z}{m}}_{c}}.$$

Demonstrando o teorema.

Observações para a validade do teorema:

– Para $r' = 0$ em (7), temos $a = 0$ e a função passa ser uma função afim. Por esse motivo, o teorema só é válido para uma P.A de segunda ordem não degenerada (termos diferentes).

– Para $r = 0$ (P.A constante) , temos $x_{n+1} = x_n$ e a expressão inicial $y_{n+1} - y_n = a({x_{n+1}}^2 - {x_n}^2) + b(x_{n+1} - x_n)$ nos dá $y_{n+1} = y_n$. O que nos remete, segundo o teorema 6.2.3, a uma função afim e não quadrática. Portanto, as abscissas precisam estar em P.A não constante, para o teorema ser válido.

Exemplo: Vamos encontrar a função quadrática que se ajusta aos dados da tabela a seguir.

x	4	7	10	13	16
y	15	66	153	276	435

Solução:

A sequência (15, 66, 153, 276, 435) é uma P.A de segunda ordem, pois (66-15, 153-66, 276-153, 435-276) = (51, 87, 123, 159) é uma P.A de razão $r' = 36$.

A partir da expressão (4), sabemos que

$$2ar^2 = r' \Rightarrow 2a.3^2 = 36 \Rightarrow 2a.9 = 36 \Rightarrow a = \frac{36}{18} \Rightarrow \boxed{a = 2}.$$

Resolvendo o sistema com os dois primeiros valores da tabela, obtemos

$$\begin{cases} 15 = 2.4^2 + b.4 + c \\ 66 = 2.7^2 + b.7 + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -17 = 4b + c \\ -32 = 7b + c \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} -17 = 4b + c & \Longleftarrow 1ª \text{ equação} \\ -32 = 7b + c & \Longleftarrow 2ª \text{ equação} \end{cases}}$$

Subtraindo a 1ª equação pela 2ª, encontramos

$$-17 + 32 = 4b - 7b \Rightarrow b = \frac{15}{-3} \Rightarrow \boxed{b = -5}.$$

Substituindo b na 1ª equação

$$-17 = 4b + c \Rightarrow -17 = 4.(-5) + c \Rightarrow \boxed{c = 3}.$$

Logo, a função é $\boxed{f(x) = 2x^2 - 5x + 3}$. Faça os testes e comprove!

Um método alternativo, será apresentado a seguir utilizando a segunda taxa de variação.

Definição 7.6.2 (segunda taxa variação): Denominamos de segunda taxa de variação de uma função e denotamos de $\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2}$, a taxa de variação da taxa de variação de uma função.

Consoante a definição 6.5.1, a segunda taxa de variação corresponde a razão entre a diferença das taxas de variação pela diferença das abscissas.

A seguir está uma tabela com n pontos, em que a terceira linha corresponde à taxa de variação e a quarta linha, refere-se à segunda taxa de variação. Observe os cálculos.

x	x_1	x_2	x_3	x_4	⋮	x_n
y	y_1	y_2	y_3	y_4	⋮	y_n
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	—	$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	$\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$	$\frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$	⋮	$\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$
$\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2}$	—	—	$\frac{\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} - \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)}{x_3 - x_2}$	$\frac{\frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} - \left(\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}\right)}{x_4 - x_3}$	⋮	$\frac{\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} - \left(\frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{x_{n-1} - x_{n-2}}\right)}{x_n - x_{n-1}}$

Vamos mostrar que no caso de função quadrática, a segunda taxa de variação é constante, quando as abscissas estão em P.A de razão $r \neq 0$. A recíproca é verdadeira, conforme o teorema seguinte.

Teorema 7.6.2 (Caracterização das funções quadráticas consoante a segunda taxa de variação): Para que uma função contínua $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ em que as abscissas estão em progressão aritmética não-constante, seja uma função quadrática, é necessário e suficiente que a segunda taxa de variação da função seja constante e diferente de zero.

Demonstração:

Vimos no início dessa seção que

$$y_n - y_{n-1} = ax_n^2 + bx_n + c - (ax_{n-1}^2 + bx_{n-1} + c) = a(x_n^2 - x_{n-1}^2) + b(x_n - x_{n-1})$$

$$y_n - y_{n-1} = a(x_n - x_{n-1}).(x_n + x_{n-1}) + b(x_n - x_{n-1}) \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = a(x_n + x_{n-1}) + b}.$$

Equivalentemente:

$$\boxed{\frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{x_{n-1} - x_{n-2}} = a(x_{n-1} + x_{n-2}) + b}.$$

A diferença é:

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{x_{n-1} - x_{n-2}} = a(x_n + x_{n-1}) - a(x_{n-1} + x_{n-2}) \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{x_{n-1} - x_{n-2}} = a(x_n - x_{n-2})} \quad (8).$$

Dividindo por $x_n - x_{n-1}$, encontramos

$$\frac{\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{x_{n-1} - x_{n-2}}}{x_n - x_{n-1}} = a.\frac{(x_n - x_{n-2})}{x_n - x_{n-1}} \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2} = a.\frac{(x_n - x_{n-2})}{x_n - x_{n-1}}} \quad (9).$$

Como as abscissas estão em P.A de razão r, temos que $x_n - x_{n-1} = r$ e $x_n - x_{n-2} = 2r$, substituindo em (9), concluímos que

$$\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2} = a.\frac{\overbrace{(x_n - x_{n-2})}^{2r}}{\underbrace{x_n - x_{n-1}}_{r}} \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2} = 2a} \; ou \; \boxed{a = \frac{\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2}}{2}}.$$

Demonstrando que a segunda taxa de variação é constante.

As condicionantes e a veracidade da suficiência desse teorema, são asseguradas pelo teorema 7.6.1. Isso ocorre porque, se a segunda taxa de variação é constante, a taxa de variação é uma P.A. E se a taxa de variação é uma P.A, as ordenadas estão em P.A de segunda ordem (verifique!).

Interessante observar que, se: $\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{x_{n-1} - x_{n-2}}$, temos o caso de uma função afim (pontos alinhados - reta) por dois motivos conexos: primeiro, a taxa de variação será constante (igual). Segundo, o valor de a na expressão (8) será nulo e a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ passará a ser uma função afim na forma $f(x) = bx + c$.

Diante do exposto, concluímos:

- Não são pontos quaisquer (x, y) de uma tabela que representam uma função quadrática (parábola), esses pontos não podem estar alinhados, ou de outra forma, a taxa de variação não pode ser constante (igual).
- Para que os pontos (x, y) de uma tabela sejam representado por uma função quadrática (parábola), é necessário e suficiente que as abscissas estejam em P.A e a segunda taxa de variação seja constante (igual e não nula). Caso as abcissas não estejam em P.A, usaremos o próximo método.

Exemplo: Resolvendo o exemplo anterior utilizando a taxa de variação.

x	4	7	10	13	16
y	15	66	153	276	435

Solução: Vamos acrescentar duas linhas na tabela e calcular a primeira e a segunda taxa de variação.

x	4	7	10	13	16
y	15	66	153	276	435
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	–	$\frac{66-15}{7-4}=17$	$\frac{153-66}{10-7}=29$	$\frac{276-153}{13-10}=41$	$\frac{435-276}{16-13}=53$
$\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2}$	–	–	$\frac{29-17}{10-7}=4$	$\frac{41-29}{13-10}=4$	$\frac{53-41}{16-13}=4$

Como os valores de x estão em P.A e a segunda taxa de variação é constante (não nula), o modelo matemático pelo qual se ajusta os dados é uma função quadrática. Assim

$$a=\frac{\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2}}{2} \Rightarrow a=\frac{4}{2} \Rightarrow \boxed{a=2} \Rightarrow f(x)=2x^2+bx+c.$$

Resolvendo o sistema com os dois primeiros valores da tabela, obtemos

$$\begin{cases} 15=2.4^2+b.4+c \\ 66=2.7^2+b.7+c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -17=4b+c \\ -32=7b+c \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} -17=4b+c & \Longleftarrow 1ª \text{ equação} \\ -32=7b+c & \Longleftarrow 2ª \text{ equação} \end{cases}}.$$

Esse sistema já foi resolvido no exemplo anterior e encontramos: $b=-5$ e $c=3$.

Logo, a função é $\boxed{f(x)=2x^2-5x+3}$.

2º exemplo: Encontre uma função pela qual se ajusta os seguintes dados

x	2	5	8	11	14
y	1	25	67	127	205

Solução: Construindo a tabela com a primeira e a segunda taxa de variação

x	2	5	8	11	14
y	1	25	67	127	205
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	–	$\frac{25-1}{5-2}=8$	$\frac{67-25}{8-5}=14$	$\frac{127-67}{11-8}=20$	$\frac{205-127}{14-11}=26$
$\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2}$	–	–	$\frac{14-8}{8-5}=2$	$\frac{20-14}{11-8}=2$	$\frac{26-20}{14-11}=2$

Como os valores de x estão em P.A e a segunda taxa de variação é constante (não nula), o modelo matemático pelo qual se ajusta os dados é uma função quadrática. Desse modo

$$a = \frac{\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2}}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Resolvendo o sistema com os dois primeiros valores da tabela, obtemos

$$\begin{cases} 1 = 1.2^2 + b.2 + c \\ 25 = 1.5^2 + b.5 + c \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} -3 = 2b + c & \Longleftarrow 1ª \text{ equação} \\ 0 = 5b + c & \Longleftarrow 2ª \text{ equação} \end{cases}}.$$

Subtraindo a 1ª equação pela 2ª, encontramos

$$-3 + 0 = 2b - 5b \;\Rightarrow\; b = \frac{-3}{-3} \Rightarrow \boxed{b = 1}.$$

Substituindo b na 1ª equação

$$-3 = 2b + c \quad \Rightarrow \quad -3 = 2.1 + c \;\Rightarrow\; \boxed{c = -5}.$$

Logo, a função é $\boxed{f(x) = x^2 + x - 5}$. Faça os testes com os dados e comprove.

3º exemplo: A tabela abaixo mostra a altura de planta de milho (cm) em função de dosagens crescente de fósforo ($kg\ ha^{-1}$) aplicadas no solo.

$P_2O_5(kg\ ha^{-1})$	60	120	180	240
Altura do milho (cm)	136,4	149,6	155,6	154,4

Fonte adaptada: (SORATTO, PEREIRA, *et al.*, 2010)

a) Obtenha uma função que se ajuste aos dados.

b) Qual o valor da dosagem de fósforo quando a planta atinge a altura máxima?

c) Qual a altura máxima?

d) Construa o gráfico da função.

Solução:

a)

x	60	120	180	240
y	136,4	149,6	155,6	154,4
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	–	$\frac{149,6 - 136,4}{120 - 60} = 0,22$	$\frac{155,6 - 149,6}{180 - 120} = 0,1$	$\frac{154,4 - 155,6}{240 - 180} = -0,02$
$\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2}$	–	–	$\frac{0,1 - 0,22}{180 - 120} = -0,002$	$\frac{-0,02 - 0,1}{240 - 180} = -0,002$

Como os valores de x estão em P.A e a segunda taxa de variação é constante (não nula), o modelo matemático pelo qual se ajusta os dados é uma função quadrática. Assim,

$$a = \frac{\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2}}{2} \Rightarrow a = \frac{-0,002}{2} \Rightarrow \boxed{a = -0,001} \Rightarrow \boxed{f(x) = -0,001x^2 + bx + c}.$$

Montando o sistema com os dois primeiros valores da tabela, temos

$$\begin{cases} 136{,}4 = -0{,}001.60^2 + b.60 + c \\ 149{,}6 = -0{,}001.120^2 + b.120 + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 136{,}4 = -0{,}001.3600 + 60b + c \\ 149{,}6 = -0{,}001.14400 + 120b + c \end{cases} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{cases} 136{,}4 = -3{,}6 + 60b + c & \Longleftarrow 1ª \text{ equação} \\ 149{,}6 = -14{,}4 + 120b + c & \Longleftarrow 2ª \text{ equação} \end{cases}}.$$

Subtraindo a 1ª equação pela 2ª

$$136{,}4 - 149{,}6 = -3{,}6 + 14{,}4 + 60\text{b} - 120b \Rightarrow \Rightarrow$$

$$-13{,}2 = 10{,}8 - 60b \Rightarrow b = \frac{-13{,}2 - 10{,}8}{-60} \Rightarrow b = \frac{-24}{-60} \Rightarrow \boxed{b = 0{,}4}.$$

Substituindo b na 1ª equação

$$136{,}4 = -3{,}6 + 60.(0{,}4) + c \Rightarrow c = 136{,}4 + 3{,}6 - 24 \Rightarrow \boxed{c = 116}.$$

Logo, a função é $\boxed{f(x) = -0{,}001x^2 + 0{,}4x + 116}$.

b) A dosagem de fósforo para uma altura máxima é dada pelo x do vértice

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-0{,}4}{2\,.\,(-0{,}001)} = \frac{-0{,}4}{-0{,}002} \Rightarrow \boxed{x_v = 200\ kg\ ha^{-1}}.$$

c) A altura máxima é dada pelo y do vértice

$$\Delta = b^2 - 4.a.c = (0{,}4)^2 - 4.(-0{,}001).(116) = 0{,}16 + 0{,}464 \Rightarrow \boxed{\Delta = 0{,}624}$$

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(0{,}624)}{4\,.\,(-0{,}001)} = \frac{-0{,}624}{-0{,}004} \Rightarrow \boxed{y_v = 156\ cm}.$$

d) Para construir o gráfico vamos utilizar os pontos notáveis da tabela.

1) Calculando os zeros:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} = \frac{-0{,}4 \pm \sqrt{0{,}624}}{2.(-0{,}001)} = \frac{-0{,}4 \pm 0{,}79}{-0{,}002} \Rightarrow$$

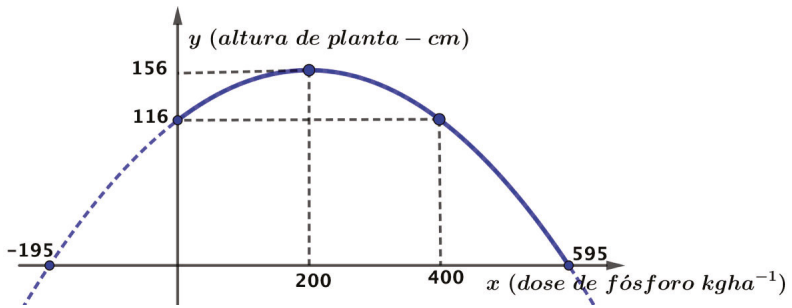
$$x = \begin{cases} x' = \dfrac{-0{,}4 + 0{,}79}{-0{,}002} = \dfrac{0{,}39}{-0{,}002} = -195. \\ x'' = \dfrac{-0{,}4 - 0{,}79}{-0{,}002} = \dfrac{-1{,}19}{-0{,}002} = 595. \end{cases}$$

2)O dobro do $x_v = 200$ é 400. Portanto, temos a abscissa $x = 400$ na direção de $c = 116$.

3)A parábola intersecta o eixo y no ponto $(0, c) = (0, 116)$.

4)O ponto de vértice (x_v, y_v) já foi calculado nos itens b e c: $(200, 116)$.

5)Como não há dosagem negativa e nem altura de planta negativa, devemos desconsiderar a parte negativa do gráfico.



Anunciaremos a seguir um artifício matemático para verificar se a função que se ajusta aos dados, quando as abscissas **não** estão em progressão aritmética, é uma função quadrática.

Na expressão (9) anterior, vimos que

$$\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2} = a.\frac{(x_n - x_{n-2})}{x_n - x_{n-1}}.$$

Denotando $\frac{(x_n - x_{n-2})}{x_n - x_{n-1}}$ de $\frac{\Delta x'}{\Delta x}$, temos

$$\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2} = a.\frac{\Delta x'}{\Delta x} \Rightarrow \boxed{a = \frac{\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2}}{\frac{\Delta x'}{\Delta x}}}.$$

Onde $\Delta x'$ é a diferença da abscissa da coluna pela abscissa que está a duas colunas à esquerda dessa (com os dados dispostos em coluna).

Esses passos demonstram em partes o teorema a seguir.

Teorema 7.6.3: A função que se ajusta a um conjunto de pares (x, y) é uma função quadrática na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ se, e somente se, o fator $\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2} / \frac{\Delta x'}{\Delta x}$ for constante e não nulo. Esse fator equivale ao coeficiente a dessa função.

Demonstração:

Já foi demonstrada a necessidade, quanto a prova da suficiência desenvolveremos a expressão (8) anterior, da seguinte forma:

$$\boxed{\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{x_{n-1} - x_{n-2}} = a(x_n - x_{n-2})} \Rightarrow$$

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = a(x_n - x_{n-2}) + \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{x_{n-1} - x_{n-2}} \Rightarrow$$

$$y_n - y_{n-1} = a(x_n - x_{n-1})(x_n - x_{n-2}) + \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{x_{n-1} - x_{n-2}}(x_n - x_{n-1}) \Rightarrow$$

$$y_n = a(x_n - x_{n-1})(x_n - x_{n-2}) + \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{x_{n-1} - x_{n-2}}(x_n - x_{n-1}) + y_{n-1} \Rightarrow$$

$$y_n = ax_n^2 + x_n(-ax_{n-2} - ax_{n-1}) + ax_{n-2}.x_{n-1} + \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{x_{n-1} - x_{n-2}}(x_n)$$

$$+ \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{x_{n-1} - x_{n-2}}(-x_{n-1}) + y_{n-1} \Rightarrow$$

$$y_n = ax_n^2 + x_n \underbrace{\left(\frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{x_{n-1} - x_{n-2}} - ax_{n-2} - ax_{n-1}\right)}_{b}$$

$$+ \underbrace{ax_{n-2}.x_{n-1} + \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{x_{n-1} - x_{n-2}}(-x_{n-1}) + y_{n-1}}_{c}.$$

O que demonstra que a função em questão é uma função quadrática.

Exemplo: Encontre uma função pela qual se ajusta os seguintes dados

x	0	1	3	11	14
y	1	2	-8	-208	-349

Solução: Construindo a tabela.

x	0	1	3	11	14
y	1	2	-8	-208	-349
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	–	$\frac{2-1}{1-0}=1$	$\frac{-8-2}{3-1}=-5$	$\frac{-208-(-8)}{11-3}=-25$	$\frac{-349-(-208)}{14-11}=-47$
$\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2}$	–	–	$\frac{-5-1}{3-1}=-3$	$\frac{-25-(-5)}{11-3}=\frac{-20}{8}$	$\frac{-47-(-25)}{14-11}=\frac{-22}{3}$
$\frac{\Delta x'}{\Delta x}$	–	–	$\frac{3-0}{3-1}=\frac{3}{2}$	$\frac{11-1}{11-3}=\frac{10}{8}$	$\frac{14-3}{14-11}=\frac{11}{3}$
$a=\frac{\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2}}{\frac{\Delta x'}{\Delta x}}$	–	–	$\frac{-3}{\frac{3}{2}}=-2$	$\frac{\frac{-20}{8}}{\frac{10}{8}}=-2$	$\frac{\frac{-22}{3}}{\frac{11}{3}}=-2$

Como o fator $\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2} / \frac{\Delta x'}{\Delta x}$ é constante (não nulo), a função que se ajusta aos dados é uma função quadrática e esse fator corresponde ao coeficiente a da função. Assim,

$$f(x) = -2x^2 + bx + c$$

Substituindo o primeiro ponto da tabela na função acima, obtemos

$$1 = -2.0^2 + b.0 + c \Rightarrow \boxed{c = 1}.$$

Substituindo o segundo ponto da tabela na função e $c = 1$, encontramos

$$2 = -2.1^2 + b.1 + 1 \Rightarrow \boxed{b = 3}.$$

A função quadrática que se ajusta aos dados é, portanto, $f(x) = -2x^2 + 3x + 1$. Faça os testes com todos os pontos e confirme.

Alternativamente, na certeza de ser uma função quadrática (e somente nessa certeza), é possível encontrar a função utilizando três pontos da tabela. Utilizando os três primeiros pontos, temos:

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = y_1 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = y_2 \\ ax_3^2 + bx_3 + c = y_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a.0^2 + b.0 + c = 1 \\ a.1^2 + b.1 + c = 2 \\ a.3^2 + b.3 + c = -8 \end{cases}.$$

Da 1ª equação, temos: $\boxed{c = 1}$, substituindo nas demais:

$$\begin{cases} a + b + 1 = 2 \\ 9a + 3b + 1 = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ 9a + 3b = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ 3a + b = -3 \end{cases}.$$

Trocando o sinal da 1ª equação e aplicando o método da soma, encontramos:

$$\begin{cases} -a - b = -1 \\ 3a + b = -3 \end{cases}$$

$$2a = -4 \Rightarrow \boxed{a = -2}.$$

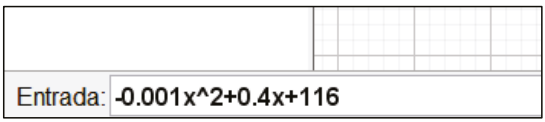
Substituindo $a = -2$ na 1ª equação, temos: $a + b = 1 \Rightarrow -2 + b = 1 \Rightarrow \boxed{b = -3}$.

A função quadrática que se ajusta aos dados é, portanto, $f(x) = -2x^2 + 3x + 1$.

7.7. O gráfico da função quadrática no geogebra

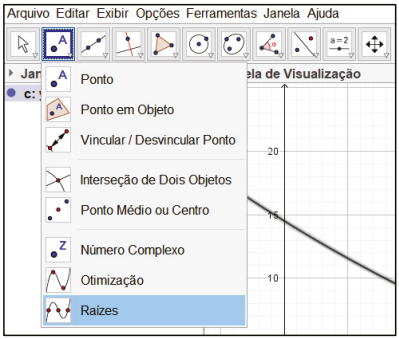
Cálculo de zeros e vértice:

1)Digite a função $y = -0{,}001x^2 + 0{,}4x + 116$ no campo de entrada do programa:



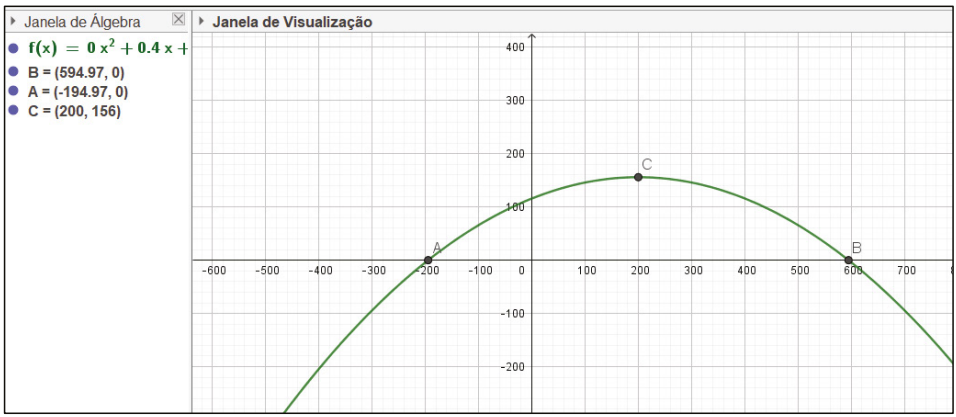
Use o scroll do mouse para cima ou baixo para aumentar e diminuir o zoom e clique mantendo pressionado o botão esquerdo do mouse para arrastar até a visualização completa da parábola.

2)No menu superior selecione a ferramenta "raízes" e clique sobre a parábola.



3)Em seguida no mesmo menu, selecione a ferramenta otimização e clique novamente sobre a parábola.

Resultado:



EXERCÍCIOS 7.4

1) Preencha uma tabela com os valores de x, y, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ e $\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2}$ para a função $f(x) = x^2 - 3x + 2$, utilizando os termos da P.A (1, 2, 3, 4, 5) para os valores de x.

2) Explique por que os dados a seguir não tem como função de ajuste uma função quadrática.

x	1,5	1	0,5
y	-8	-3	2

3) Um pesquisador colheu as informações de um experimento, e percebeu a relação entre duas grandezas conforme a tabela a seguir.

x	2	4	6
y	5	17	65

a) Calcule uma função quadrática que se ajusta aos dados.

b) Para mostrar que a função quadrática não é a única função que se ajusta aos dados, encontre outra função na forma $f(x) = a^x + b$.

4) Encontre a função que se ajusta aos dados.

x	2	6	10	14	18	22
y	6	14	350	714	1206	1826

5) Encontre a função que se ajusta aos dados.

x	0	2	3	6	11	15
y	9	89	114	129	-46	-366

6) Todos os pontos a seguir não pertencem a uma mesma parábola, com exceção de um ponto. Indique esse ponto.

x	-4	1	2	5	8	9
y	-19	6	5	-10	-46	-58

7) A tabela abaixo indica o teor de matéria seca y ($t.ha^{-1}$) em uma espécie de planta em função do pH x do solo.

pH (x)	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5
MS (y)	1,875	11,875	16,875	16,875	11,875

a) Obtenha uma função que se ajusta aos dados.

b) Obtenha o ponto de maior teor de matéria seca.

c) Calcule os valores do pH para MS zero.

d) Construa o gráfico.

e) No geogebra utilize as ferramentas "raízes" e "otimização" para confirmar o gráfico construído no item anterior.

8) Um aluno de engenharia agronômica em seus experimentos com plantas, colheu as informações sobre duas grandezas e seus valores auto relacionados, conforme a tabela a seguir.

(x)	2	7	12	17	22
(y)	-11	-16	29	124	???

a) Obtenha uma função que se ajusta aos dados.

b) Qual o valor de y para $x = 22$?

c) Qual outro valor de x que pode ser encontrado em $y = -16$, além do mostrado na tabela?

d) Qual o menor valor possível de y nesse experimento? Confirme no software geogebra essa informação.

9) A tabela abaixo indica a concentração y de alumínio (mg/kg) em uma espécie de planta em função do acúmulo de fósforo x (mg/kg) no solo.

Fósforo (x)	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Alumínio (y)	8,95	4,69	1,73	0,07	-0,29	0,65	2,89	6,43	11,27

Fonte adaptada: (FERREIRA, 1999)

a) Obtenha uma função que se ajusta aos dados.

b) Qual o valor de y para $x = 100$?

c) Qual o ponto de menor concentração de alumínio?

d) Construa o gráfico da função.

10) Na tabela a seguir tem-se a variação dos dados médios observados do peso médio de frutos (PMF), em que os dados estimados obtidos estão apresentados nas equações de regressão, em função da variação de lâminas crescentes de irrigação com base na evapotranspiração da cultura (%ETc) e das doses de potássio.

Fonte adaptada: (ALBUQUERQUE, SILVA, *et al.*, 2011)

%ETc (x)	80	90	100	110	120
PMF (g) (y)	66	81	83	72	48

a) Obtenha uma função que se ajusta aos dados.

b) Qual o valor de y para $x = 85$?

c) Qual o maior peso médio de frutos observado?

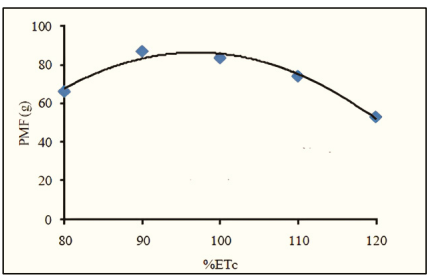


Imagem da fonte

11)Na tabela a seguir tem-se os dados da produção de grãos de milho (Pr) por teores de fósforo (P) no solo:

P (mg dm^3) (x)	5	10	15	20	25	30	35
Pr (kg ha^{-1}) (y)	2670,5	4384	5726,5	6698	7298,5	7528	7386,5

Fonte adaptada: (VELOSO, CORREA, *et al.*, 2005)

a) Obtenha uma função que se ajusta aos dados.

b) Segundo a função de ajuste, qual o teor de fósforo para uma produção máxima de grãos de milho?

12)A relação entre o Índice de área foliar (IAF) e os dias após o transplantio (DAT) do tomate sob condições de ambiente protegido, estão na tabela a seguir.

DAT ($dias$)	20	40	60	80	100	120
IAF (m^2 m^{-2})	2,48	3,52	3,92	3,68	2,8	1,28

Fonte adaptada: (REIS, AZEVEDO, *et al.*, 2013; SORATTO, PEREIRA, *et al.*, 2010)

a) Obtenha uma função que se ajusta aos dados.

b) Segundo a função de ajuste, qual o DAT para um valor máximo de IAF?

13)Uma função quadrática é uma função contínua $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

a) Transforma uma progressão geométrica em progressão aritmética de segunda ordem.

b) Transforma quaisquer sequências em progressão aritmética de segunda ordem.

c) Transforma uma progressão aritmética de segunda ordem em uma progressão aritmética.

d) Transforma uma progressão aritmética em uma progressão aritmética de segundo ordem.

e) Transforma uma quaisquer sequências em uma progressão geométrica.

14)Sobre a caracterização de uma função quadrática quanto as taxas de variação, podemos afirma que:

a) Se a taxa de variação for constante, a função que se ajusta aos dados é uma função quadrática.

b) Se a segunda taxa de variação for constante, a função que se ajusta aos dados é uma função quadrática.

c) Se a segunda taxa de variação for constante e as abscissas estiverem em P.A, então a função que se ajusta aos dados é uma função quadrática.

d) Se a taxa de variação for constante e as abscissas estiverem em P.A, então a função que se ajusta aos dados é uma função quadrática.

e) Se a segunda taxa de variação não for constante e as abscissas estiverem em P.A, então a função que se ajusta aos dados é uma função quadrática.

7.8. Regressão quadrática

Já sabemos que a relação entre duas variáveis em um conjunto de dados, representa uma função quadrática quando as abscissas estão em P.A e a segunda taxa de variação é igual (teorema 7.6.2) ou quando o fator do teorema 7.6.3 é igual. No entanto, em algumas situações é possível que a segunda taxa de variação ou esse fator não sejam estritamente iguais, mas próximos da igualdade, indicando a possibilidade[11] de a função quadrática ser o modelo matemático que mais se aproxima aos dados.

Para encontrar tal função, utilizaremos um método utilizado na Estatística denominado de regressão quadrática. Como pretendemos ter o mínimo dos quadrados das diferenças, temos para n pontos

$$(y_1 - y)^2 + (y_2 - y)^2 + (y_3 - y)^2 + \cdots (y_n - y)^n$$

Escrevendo como $S = \sum_{i=1}^{i=n} (y_i - y)^2$ e considerando $y = ax^2 + bx + c$, temos

$$S = \sum_{i=1}^{i=n} (y_i - ax_i{}^2 - bx_i - c)^2$$

O valor mínimo de S acontece para os valores a, b e c que estão na solução do sistema

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{i=n} y_i = nc + b\sum_{i=1}^{i=n} x_i + a\sum_{i=1}^{i=n} x_i{}^2 \\ \sum_{i=1}^{i=n} x_i y_i = c\sum_{i=1}^{i=n} x_i + b\sum_{i=1}^{i=n} x_i{}^2 + a\sum_{i=1}^{i=n} x_i{}^3 \\ \sum_{i=1}^{i=n} x_i{}^2 y_i = c\sum_{i=1}^{i=n} x_i{}^2 + b\sum_{i=1}^{i=n} x_i{}^3 + a\sum_{i=1}^{i=n} x_i{}^4 \end{cases}$$

Fórmulas utilizadas na estatística.

De imediato parecem expressões complicadas, mas na verdade são apenas trabalhosas, pois é preciso resolver esse sistema que possui três equações e três incógnitas.

Exemplo: Vamos encontrar de acordo com as informações da tabela a seguir, uma função quadrática que mais se aproxima aos dados.

(x)	1	3	5	7	9
(y)	-20	-17	6	40	100

Solução: Como os valores de x estão em P.A, vamos verificar inicialmente se a segunda taxa de variação é constante.

[11] Verdadeiramente, será o coeficiente de determinação que comparativamente irá dizer qual dos modelos matemáticos - função afim, quadrática, exponencial ou logarítmica - será a função que melhor se aproxima aos dados.

x	1	3	5	7	9
y	-20	-17	6	40	100
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	–	$\frac{-17-(-20)}{3-1}=1{,}5$	$\frac{6-(-17)}{5-3}=11{,}5$	$\frac{40-6}{7-5}=17$	$\frac{100-40}{9-7}=30$
$\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2}$	–	–	$\frac{11{,}5-1{,}5}{5-3}=5$	$\frac{17-11{,}5}{7-5}=2{,}75$	$\frac{30-17}{9-7}=6{,}5$

A segunda taxa de variação não é constante, porém relativamente próxima da igualdade. Desse modo, a função quadrática pode ser a função que melhor se aproxima aos dados. Para encontrá-la, usaremos as fórmulas da regressão quadrática. Acompanhe o roteiro a seguir.

1º passo: Calcular as somatórias dos seguintes termos: x, y, xy, x^2 , x^3, x^4 e x^2y.

Para isso, coloque os dados na vertical e acrescente uma coluna para cada termo.

x	y	xy	x^2	x^3	x^4	x^2y
1	*-20*	*-20*	*1*	*1*	*1*	*-20*
3	*-17*	*-51*	*9*	*27*	*81*	*-153*
5	*6*	*30*	*25*	*125*	*625*	*150*
7	*40*	*280*	*49*	*343*	*2401*	*1960*
9	*100*	*900*	*81*	*729*	*6561*	*8100*
25	*109*	*1139*	*165*	*1225*	*9669*	*10037*

Soma (∑)

2º passo: Montar o sistema com os coeficientes:

$$\sum_{i=1}^{i=n} y_i = nc + b\sum_{i=1}^{i=n} x_i + a\sum_{i=1}^{i=n} {x_i}^2$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} x_i y_i = c\sum_{i=1}^{i=n} x_i + b\sum_{i=1}^{i=n} {x_i}^2 + a\sum_{i=1}^{i=n} {x_i}^3$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} {x_i}^2 y_i = c\sum_{i=1}^{i=n} {x_i}^2 + b\sum_{i=1}^{i=n} {x_i}^3 + a\sum_{i=1}^{i=n} {x_i}^4$$

$$\begin{cases} 109 = 5.c + b.25 + a.165 \\ 1139 = c.25 + b.165 + a.1225 \\ 10037 = c.165 + b.1225 + a.9669 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5c + 25b + 165a = 109 \\ 25c + 165b + 1225a = 1139 \\ 165c + 1225b + 9669a = 10037 \end{cases}$$

3º passo: Resolver o sistema.

Usaremos aqui o método do escalonamento presente na subseção 14.2.1 – volume 3. O método consiste em eliminar incógnitas nas equações até restar somente uma.

Deixamos sempre a primeira equação intacta. Para eliminar a expressão "$25c$" que está na segunda equação, vamos multiplicar a primeira por -5 e somar com a segunda

$$\begin{cases} 5c + 25b + 165a = 109 \\ 25c + 165b + 1225a = 1139 \\ 165c + 1225b + 9669a = 10037 \end{cases}$$ x (-5) ⮐

$$\begin{cases} 5c + 25b + 165a = 109 \\ 40b + 400a = 594 \\ 165c + 1225b + 9669a = 10037 \end{cases}$$

Observe que a expressão $25c$ da segunda equação foi eliminada.

Para eliminar a expressão "$165c$" que está na terceira equação devemos multiplicar a primeira por -33 e somar com a terceira

$$\begin{cases} 5c + 25b + 165a = 109 \\ 40b + 400a = 594 \\ 165c + 1225b + 9669a = 10037 \end{cases} \quad \text{x (-33)}$$

$$\begin{cases} 5c + 25b + 165a = 109 \\ 40b + 400a = 594 \\ 400b + 4224a = 6440 \end{cases}$$

Observe que a expressão $165c$ da terceira equação foi eliminada.

Para eliminar a expressão "$400b$" que está na terceira equação devemos multiplicar a segunda por -10 e somar com a terceira

$$\begin{cases} 5c + 25b + 165a = 109 \\ 40b + 400a = 594 \\ 400b + 4224a = 6440 \end{cases} \quad \text{x (-10)}$$

$$\begin{cases} 5c + 25b + 165a = 109 \\ 40b + 400a = 594 \\ 224a = 500 \end{cases} \qquad a = \frac{500}{224} = 2{,}2321\ldots$$

Pare encontrar as demais incógnitas, basta substituir o valor de a encontrado nas outras equações (de baixo para cima). Substituindo na 2ª equação

$$40b + 400a = 594 \;\Rightarrow\; 40b + 400\,.\,2{,}23 = 594 \;\Rightarrow\; 40b + 892 = 594 \;\Rightarrow$$

$$40b = 594 - 892 \;\Rightarrow\; 40b = -298 \;\Rightarrow\; \boxed{b = \frac{-298}{40} = -7{,}45}.$$

Substituindo a e b na 1ª equação

$$5c + 25b + 165a = 109 \;\Rightarrow\; 5c + 25\,.\,(-7{,}45) + 165\,.\,2{,}23 = 109 \;\Rightarrow$$

$$5c - 186{,}25 + 367{,}95 = 109 \;\Rightarrow\; 5c + 181{,}7 = 109 \;\Rightarrow$$

$$5c = -72{,}7 \;\Rightarrow c = \frac{-72{,}7}{5} \;\Rightarrow\; \boxed{c = -14{,}54}.$$

Dessa forma, a função que mais se aproxima aos dados é

$f(x) = ax^2 + bx + c \;\Rightarrow \boxed{f(x) = 2{,}23x^2 - 7{,}45x - 14{,}54}$.

Para mostrar a proximidade das informações, vamos calcular o coeficiente de determinação (o mesmo visto em regressão linear).

(x)	(y)	$\hat{y}$	$(y-\hat{y})^2$ $(resíduos)$	$(y-\overline{y})^2$ $(diferença\ p/\ média)$
1	*-20*	*-19,7429*	*0,066*	*1747,24*
3	*-17*	*-16,8286*	*0,0294*	*1505,44*
5	*6*	*3,942857*	*4,232*	*249,64*
7	*40*	*42,57143*	*6,613*	*331,24*
9	*100*	*99,05714*	*0,889*	*6115,24*
----	$\overline{y} = 21{,}8$	-----	$SQ_{RES} = 11{,}829$	$SQ_{DM} = 9948{,}8$

$$R^2 = 1 - \frac{SQ_{RES}}{SQ_{DM}} \Rightarrow R^2 = 1 - \frac{11{,}829}{9948{,}8} = 0{,}9988 \Rightarrow \boxed{R^2 = 99{,}88\%}.$$

É quase [12] 100%. Veja no gráfico 7.8.1 a proximidade dos pontos com a parábola da função calculada.

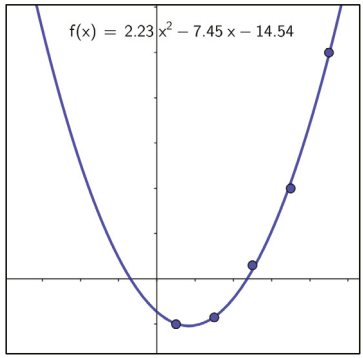
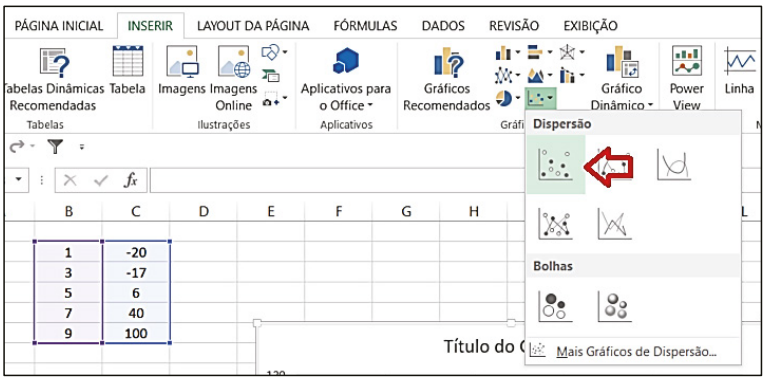


Figura 7.8.1

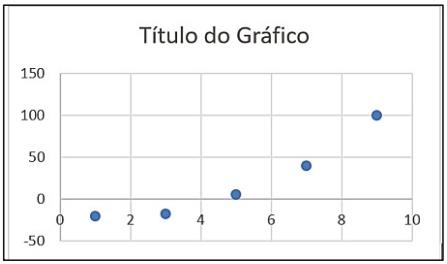
7.8.1. Regressão quadrática usando planilha eletrônica

Como demonstração iremos utilizar o Microsoft Excel 2013 e as informações do exemplo anterior.

Ao abrir o Microsoft Excel digite numa pasta de trabalho em branco as informações da tabela. Selecione todos os valores (só os valores), vá ao menu superior e clique na aba "inserir". Nas opções dessa aba, clique em gráficos de dispersão, conforme a imagem a seguir.

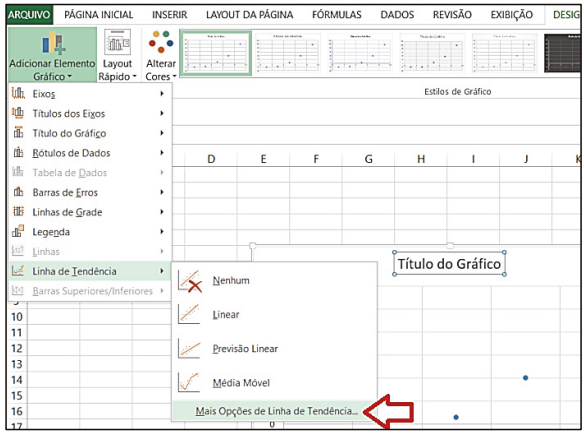


Os pontos serão mostrados:

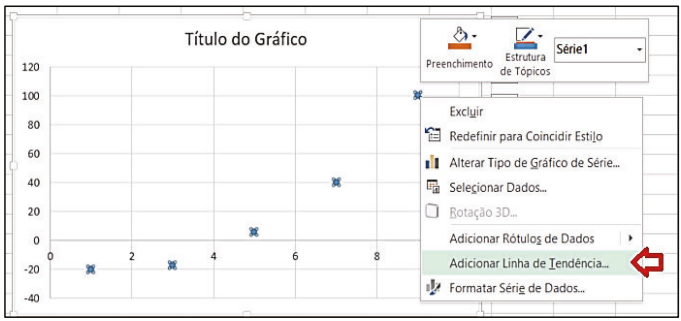


[12] Se acaso o coeficiente de determinação for 100%, significa que os dados se ajustam perfeitamente a função.

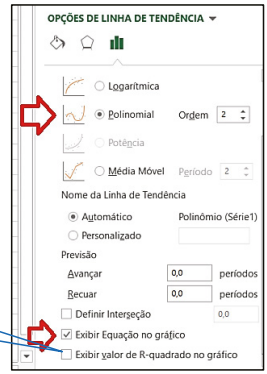
Clique sobre o gráfico e em seguida, vá a aba "DESIGN" e clique na primeira opção dessa aba: "Adicionar elemento gráfico". Depois, clique novamente em "Linha de Tendência" e, em seguida, escolha a opção "Mais opções de linha de tendência". Conforme a ilustração a seguir:



Outra alternativa é clicar sobre o gráfico (em algum dos pontos) com o botão direito e selecione a opção formatar linha de tendência:

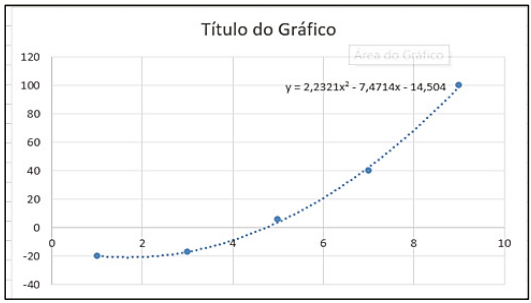


Em seguida marque a opção: "Polinomial" e ao lado "ordem" 2. Depois clique em "Exibir equação no gráfico" para o equação ser visualizada. Veja a ilustração ao lado:



Marque essa opção caso deseje que o Excel mostre o coeficiente de determinação.

O Excel mostrará a equação no gráfico:



7.8.2. Regressão quadrática usando calculadora científica

Como demonstração iremos utilizar a calculadora VINACAL VN-500MS (ou CASIO FX-82MS - detalhes no prefácio) e utilizar as informações do exemplo anterior.

Inicialmente, zere a memória e as configurações da calculadora, tecle:



SHIFT, MODECLR, 3, =

2º - Tecle: 

(MODECLR, 3 - corresponde a regressão).

A tela da calculadora mostrará as opções que estão na figura 7.8.2.1;

Tecle a seta para a direita da calculadora uma vez, conforme indica a "mão" da figura 7.8.2.1;

3º - Tecle: 

(que corresponde a quadrática);

4º - Digite os pontos (os pares) separados por vírgula e tecle em 

.

A cada M+ o valor de n = 1, 2, 3 aparecerá na tela. Continue o processo até o último ponto.

5º - Ao término da inclusão dos pontos, tecle: 

(SHIFIT, 2 - refere-se variância);

6º - Tecle a seta para a direita da calculadora duas vezes, conforme indica a "mão" na figura 7.8.2.2;

7º - Na tela da figura 7.8.2.3, temos as opções: 1 para o coeficiente A (que é o coeficiente c da função quadrática), 2 para o coeficiente B (que é o mesmo coeficiente b da função quadrática) e 3 para o coeficiente C (que é o coeficiente a da função quadrática).

Tecle: [1] [=] e o visor mostrará o coeficiente c da função quadrática: -14,5 conforme figura 7.8.2.4);

8º - Refaça os passos 5º e 6º para voltar as opções (de variância);

9º - Tecle: [2] [=] e o visor mostrará o coeficiente b da função quadrática: -7,47 – figura 7.8.2.5);

10º - Tecle: e [3] [=] o visor mostrará o coeficiente a da função quadrática: 2,23 – figura 7.8.2.6).



Figura 7.8.2.1



Figura 7.8.2.2



Figura 7.8.2.3



Figura 7.8.2.4



Figura 7.8.2.5



Figura 7.8.2.6

EXERCÍCIOS 7.5

1) Encontrar de acordo com as informações da tabela a seguir, uma função quadrática que mais se aproxima aos dados, em seguida confirme a função usando o uma planilha eletrônica ou calculadora científica.

(x)	1	2	3	4	5
(y)	1	3	5	10	12

2) Encontrar de acordo com as informações da tabela a seguir, uma função quadrática que mais se aproxima aos dados, em seguida confirme a função usando uma planilha eletrônica ou calculadora científica.

(x)	2	4	6	8	10
(y)	3	6	12	18	26

3) A produtividade do milho safrinha pode ser aumentada com a adubação nitrogenada em cobertura mesmo quando cultivado em sucessão à soja. As informações a seguir referem-se ao valor da massa de mil grãos de acordo com as doses de nitrogênio.

$(Doses\ de\ Nitrogênio)$	10	30	60	90	120
$(Massa\ de\ mil\ grãos)$	237,3	249,7	272,8	301,3	335,2

Fonte: (SORATTO, PEREIRA, *et al.*, 2010)

a) Obtenha uma função quadrática que se aproxima aos dados.

b) Calcule o coeficiente de determinação e analise o seu valor.

c) Confirme a função anterior usando uma planilha eletrônica ou calculadora científica.

4) Com a perspectiva de crescimento do pinhão-manso e o acúmulo e distribuição de metais na planta, objetivou-se, com um experimento, avaliar os efeitos do cobre e zinco nessa planta. Os tratamentos consistiram em cinco doses de cobre (0; 25; 50; 75 e 100 $mg\ dm^{-3}$), com três repetições. Os teores totais de Cobre (Cu) encontrados no solo, após a colheita das plantas (teor final), correspondentes aos tratamentos foram, respectivamente, 0,40; 13,32; 30,75; 27,77 e 60,35 $mg\ dm^{-3}$, conforme ilustrado no gráfico.

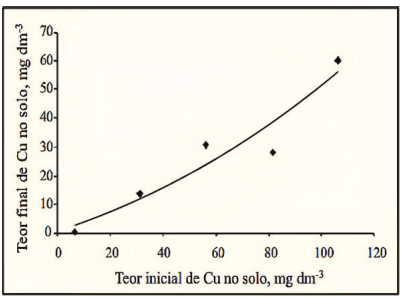


Imagem da fonte

Utilizando uma planilha eletrônica ou calculadora científica, calcule a função que melhor se ajusta aos dados.

Fonte adaptada: (CHAVES, MESQUITA, *et al.*, 2010)

5) Com intuito de aplicar modelagem matemática nas curvas de secagem de grãos de feijão-caupi (Vigna unguiculata), identificou-se uma relação entre as temperaturas em razão da umidade. As informações estão na tabela a seguir.

$(Temperatura)$	25	35	45	55	65
$(Razão\ de\ umidade)$	0,9	0,6	0,4	0,2	0,1

Fonte adaptada: (MORAIS, DEVILLA, *et al.*, 2013)

a) Obtenha uma função quadrática que se aproxima aos dados.

b) Calcule o coeficiente de determinação.

c) Confirme a função anterior usando uma planilha eletrônica ou calculadora científica.

6) Um experimento foi realizado para avaliar os efeitos de diferentes doses de nitrogênio aplicadas no solo sobre a produção de matéria seca do capim Tanzânia (Pannicum maximum cv. Tanzânia) cultivado de forma irrigada em um local de latossolo vermelho-amarelo, com textura argilosa. As doses empregadas no experimento foram de 200, 400 e 800 kg de nitrogênio por hectare, sendo utilizada a ureia como fertilizante. Além disso, foi mantida uma área onde não houve aplicação de nitrogênio. A tabela a seguir apresenta as equações de regressão obtidas para cada estação do ano, relacionando a dose de nitrogênio aplicada no solo (X, em kg/ha) com a produção acumulada de matéria seca do capim Tanzânia (Y, em kg/ha).

Fonte adaptada: ENADE-AGRONOMIA-2016

Com base nesse contexto e nas informações apresentadas na tabela, assinale a opção em que é apresentada uma conclusão do experimento.

Estação do ano	Equação	R^2
Verão	$Y = 2\,116 + 13{,}82\,X - 0{,}0099\,X^2$	0,91
Outono	$Y = 1\,637 + 10{,}178\,X - 0{,}0077\,X^2$	0,99
Inverno	$Y = 1\,132 + 4{,}862\,X - 0{,}0045\,X^2$	0,99
Primavera	$Y = 1\,706 + 3{,}494\,X$	0,91

VIANA, M. C. M. et al. Production and nutrition of irrigated Tanzania guinea grass in response to nitrogen fertilization. **Revista Brasileira de Zootecnia**. p. 238-243, 2010 (adaptado).

a) Na ausência de adubação nitrogenada, não haverá acúmulo de matéria seca no inverno.

b) Em todas as estações do ano e para todas as doses obteve-se acúmulo de matéria seca sempre crescente em função da aplicação de adubo nitrogenado.

c) A produção acumulada de matéria seca apresentou resposta linear à adubação nitrogenada em todas as estações do ano.

d) O aumento da adubação nitrogenada poderá resultar em redução na produção acumulada de matéria seca na primavera.

e) Para cada 100 kg de nitrogênio aplicado no solo na primavera, obteve-se um aumento de 349,4 kg na produção acumulada de matéria seca por hectare.

7) (ENADE-AGRONOMIA-2019) Os biorreguladores são utilizados para interferir no crescimento e no desenvolvimento de plantas. Um experimento foi conduzido para avaliar o desempenho de plantas de soja em resposta à sua aplicação. Como resultado, chegou-se à regressão apresentada na figura a seguir, que representa a produtividade da soja (kg·ha^{-1}) em função de diferentes doses do biorregulador aplicado (ml·ha^{-1}), sendo que MF é o máximo da função e PM é ponto de máximo.

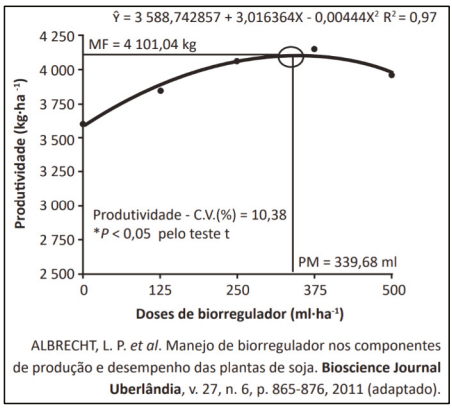
Com base nas informações apresentadas, assinale a opção correta.

a) A dose de 500 ml· ha^{-1} de biorregulador proporcionou a maior produtividade da soja.

b) A produtividade da soja apresentou relação linear direta com as doses do biorregulador.

c) A aplicação do biorregulador apresentou efeito positivo na produtividade da soja, independentemente da dose aplicada.

d) A produtividade da soja apresentou uma resposta quadrática em função das doses do biorregulador.



ALBRECHT, L. P. *et al*. Manejo de biorregulador nos componentes de produção e desempenho das plantas de soja. **Bioscience Journal Uberlândia**, v. 27, n. 6, p. 865-876, 2011 (adaptado).

Imagem da fonte

e) O coeficiente de determinação (R^2) apresentado, inferior a 1,00, indica que o modelo gerado não foi significativo no intervalo testado.

CAPÍTULO

8

FUNÇÃO EXPONENCIAL

FUNÇÃO EXPONENCIAL

8. FUNÇÃO EXPONENCIAL

Os modelos matemáticos não-lineares com curvas de crescimento ou decrescimento podem ser representados por uma função exponencial. A proliferação de uma praga em uma lavoura, o crescimento de plantas, a variação de um capital aplicado a juros compostos e a meia-vida de um fármaco, são alguns exemplos de sua aplicação.

Antes de iniciar os estudos, faremos uma revisão sobre potências e suas propriedades, que são a base para o seu desenvolvimento dessa função.

8.1. Revisão sobre potências

Toda potência possui os seguintes elementos:

a^n Onde a é a **base** e n o **expoente**.

A potência corresponde a uma multiplicação de fatores iguais, isto é, representam multiplicações repetidas de um mesmo número (ou fator). Exemplos:

- ✓ 2^5 é o mesmo que 2.2.2.2.2 (cinco vezes);
- ✓ 7^3 é o mesmo que 7.7.7 (três vezes);
- ✓ a^4 é o mesmo que $a.a.a.a$ (quatro vezes). Assim:

$$a^n = \underbrace{a.a.a.a \ldots a}_{n\ vezes}$$

Leitura: Lê-se "o número da base" + "elevado à" + "o nome do número do expoente na forma ordinal" + opcionalmente a palavra "potência". Exemplos:

- ✓ 3^4 - três elevado à quarta potência;
- ✓ 5^{15} - cinco elevado à décima quinta potência;
- ✓ 7^2 - sete elevado à segunda potência.

Casos particulares: quando o 2 ou o 3 estão no expoente, podemos lê-los da seguinte forma: o número da base + "ao quadrado" ou o número da base + "ao cubo", respectivamente. Exemplos: 5^2 - cinco ao quadrado e 11^3 - onze ao cubo.

8.1.1. Resolvendo potências com expoente natural

a) $2^6 = \underbrace{2.2.2.2.2.2}_{6\ vezes} = 64.$

b) $5^2 = \underbrace{5.5}_{2\ vezes} = 25.$

c) $7^3 = 7.7.7 = 343.$

d) $(-6)^2 = (-6).(-6) = +36.$

e) $(-2)^{10} = (-2).(-2).(-2)\ (-2).(-2)\ (-2).(-2).(-2).(-2).(-2) = 1024.$

f) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right).\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$

g) $0^{100} = \underbrace{0.0.0.\ldots.0.0}_{100\ vezes} = 0.$

h) $(-1)^{100} = \underbrace{(-1).(-1).(-1).\ldots.(-1)}_{100\ vezes} = 1.$

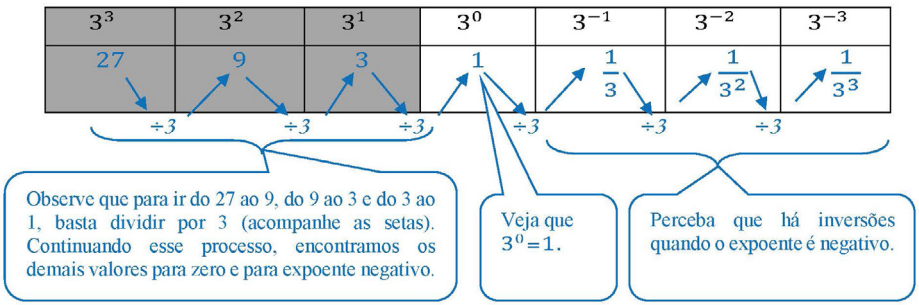
SAIBA MAIS!

- *A potência $(-a)^b$ terá resultado positivo, se b for par, e negativo, se b for ímpar.*
- *$-a^b$ é o oposto de $(-a)^b$ quando b é par. E $-a^b$ é igual a $(-a)^b$ quando b é ímpar.*

Exemplo: $-2^4 = -2.2.2.2 = -16$.
$(-2)^4 = (-2).(-2).(-2).(-2) = +16$

8.1.2. Resolvendo potências com expoente inteiro

No quadro a seguir estão as potências de base 3 de expoentes positivos, pela qual já sabemos calcular e que já foram preenchidas. As demais potências à direita foram calculadas com o intuito de seguir o mesmo padrão, isto é, dividindo o resultado à esquerda sucessivamente por 3. Acompanhe:



A tabela acima foi construída com potências de base 3, mas pode ser facilmente construída com qualquer base diferente de zero (faça os testes!). O objetivo de sua construção visa justificar as seguintes afirmações.

1º) Todo número (com exceção do zero) elevado a zero é um.

$$a^0 = 1$$

Demonstração: Embora tenhamos a justificativa, faremos uma demonstração algébrica, usando a propriedade P2 que está na subseção 8.1.3 a seguir.

$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a.a.a...a}^{m\ vezes}}{\underbrace{a.a.a...a}_{n\ vezes}}$, se $m = n$ e $a \neq 0$, temos: $a^0 = \frac{a^m}{a^m} = \frac{\overbrace{a.a.a...a}^{m\ vezes}}{\underbrace{a.a.a...a}_{m\ vezes}} = 1$.

Quanto à exceção, se $a = 0$, teremos em $a^0 = \frac{a^m}{a^m}$ a expressão: $0^0 = \frac{0^m}{0^m} = \frac{0}{0}$.

Mas, quanto é $\frac{0}{0}$?

Dividir zero por zero é achar um número qualquer, que multiplicado por zero dá zero, ora, existem infinitos. Dessa forma, a expressão 0^0 possui valor indeterminado.

2º) Todo número (com exceção do zero) com expoente negativo é o inverso do mesmo número com expoente positivo (e vice-versa).

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \quad \text{ou} \quad a^m = \frac{1}{a^{-m}}$$

Demonstração: Sabemos que $a^0 = 1$ e que $0 = m - m$, então $a^{m-m} = 1$. Desmembrando conforme a propriedade P1 que veremos a seguir, temos

$$a^{m-m} = a^m . a^{-m} = 1 \Rightarrow \boxed{a^m = \frac{1}{a^{-m}}}.$$

Exemplos resolvidos:

- $2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$.
- $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$.
- $(-7)^{-2} = \frac{1}{(-7)^2} = \frac{1}{49}$.
- $9998^0 = 1$.
- $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{1}\right)^2 = 4$.
- $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{4}{3}.\frac{4}{3}.\frac{4}{3} = \frac{64}{27}$.

Quando a base for uma fração e o expoente for negativo, inverte-se a fração e troca o sinal do expoente.

8.1.3. Propriedades de potência

Existem algumas propriedades que podem ser úteis em desenvolvimentos matemáticos envolvendo potências. Estão a seguir as propriedades mais importantes e suas respectivas demonstrações.

Sejam a, b, m e n números reais:

1ª propriedade (P1):

$a^m . a^n = a^{m+n}$ ⇨ Produto de potências com bases iguais: repetimos a base e somamos os expoentes.

$$a^m . a^n = \underbrace{a.a.a\ldots a}_{m\ vezes} . \underbrace{a.a.a\ldots a}_{n\ vezes} = \underbrace{a.a.a\ldots a}_{m+n\ vezes} = a^{m+n}$$

2ª propriedade (P2):

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ ⇨ Divisão de potências com bases iguais: repetimos a base e subtraímos os expoentes.

Demonstração: $\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a.a.a...a}^{m\ vezes}}{\underbrace{a.a.a...a}_{n\ vezes}}$ cancelando termos iguais sobra a diferença a^{m-n}.

3ª propriedade (P3):

$(a.b)^n = a^n.b^n$ ⇨ Produto de números elevados a um só expoente: distribui-se o expoente para cada base. (isso se aplica a mais de duas bases)

Demonstração:

$$(a.b)^n = \underbrace{(a.b).(a.b).(a.b)\ldots(a.b)}_{n\ vezes} = \underbrace{a.a.a\ldots a}_{n\ vezes}.\underbrace{b.b.b\ldots b}_{n\ vezes} = a^n.b^n$$

4ª propriedade (P4):

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^m}{a^n}$ ⇨ Divisão de números elevados a um só expoente: distribui-se o expoente para cada base.

Demonstração: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b}.\frac{a}{b}.\frac{a}{b}\ldots\frac{a}{b}}_{n\ vezes} = \frac{\overbrace{a.a.a...a}^{n\ vezes}}{\underbrace{b.b.b...b}_{n\ vezes}} = \frac{a^n}{b^n}$

5ª propriedade (P5):

$(a^n)^m = a^{n.m}$ ⇨ Potência da potência: repete-se a base e multiplica-se os expoentes.

Demonstração: $(a^n)^m = \overbrace{a^n.a^n.a^n\ldots a^n}^{m\ vezes} = a^{\overbrace{n+n+n+\cdots+n}^{m\ vezes}} = a^{n.m}$

Exemplos resolvidos:

- $3^2.3^3 = 3^{2+3} = 3^5$
- $\frac{7^{10}}{7^9} = 7^{10-9} = 7^1 = 7.$
- $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = \frac{1^{-2}}{4^{-2}} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4.$
- $(2.5)^2 = 2^2.5^2 = 4.25 = 100.$
- $(6^{-2})^3 = 6^{-2.3} = 6^{-6} = \frac{1}{6^6} = \frac{1}{46656}.$
- $(4^{-1} - (-5)^2)^{-1} =$

  $\left(\frac{1}{4} - 25\right)^{-1} = \left(\frac{1-4.25}{4}\right)^{-1} = \left(\frac{1-100}{4}\right)^{-1} = \left(\frac{-99}{4}\right)^{-1} = \frac{-4}{99}.$

SAIBA MAIS!

1) *Não confunda* $(a^n)^m$ *com* a^{n^m}.

Exemplo: $(2^3)^5 = 2^{15} \neq 2^{3^5} = 2^{243}$

2) *Não existe propriedade para soma ou subtração.*

Exemplo: 3^2+3^3 *ou* 3^2-3^3.

Observe que não há nenhuma propriedade que possa ser utilizada neste último exemplo.

8.1.4. Resolvendo potências com expoente racional

A radiciação na matemática é definida da seguinte forma: qual um número que multiplicado por ele mesmo n vezes é igual a a^m? Ou de outra forma, qual um número cuja n-ésima potência é igual a a^m? Isso se escreve assim

$$\sqrt[n]{a^m}$$

e lê-se assim: "raiz n-ésima de a elevado a m".

Utilizaremos a propriedade 5 para demonstrar que é possível escrever uma radiciação em forma de potenciação. Veja:

$$a^{x.n} = (a^x)^n = \underbrace{a^x.a^x.a^x \dots a^x}_{n\ vezes} = a^m\ (*)$$

Como denotamos o resultado acima como a^m, a raiz n-ésima de a^m é $a^x \Rightarrow \sqrt[n]{a^m} = a^x$. Por outro lado, em $(*)$ $a^{x.n} = a^m \Rightarrow x = \frac{m}{n}$.

Dessa forma, concluímos que:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \iff \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Exemplos resolvidos:

- $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{3^1} = \sqrt{3}.$
- $27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27^1} = \sqrt[3]{27} = 3.$
- $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{-3}{2}} = \sqrt[2]{\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}} = \sqrt[2]{\left(\frac{4}{1}\right)^{3}} = \sqrt{64} = 8.$
- $9^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{9^3} = \sqrt[2]{9.9.9} = \sqrt[2]{3.3.3.3.3.3} = 3^{\frac{6}{2}} = 3^3 = 27.$
- $\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{-3}{2}} = \sqrt[2]{(\frac{1}{16})^{-3}} = \sqrt[2]{16^3} = \sqrt[2]{16.16.16} = \sqrt[2]{4.4.4.4.4.4} = 4^3 = 64.$
- $(-1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{(-1)^1} = \sqrt[3]{-1} = 1.$
- $(-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{(-1)^1} = \sqrt{-1} \nexists\ em\ \mathbb{R}.$
- $\left((256)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{(256)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[4]{\sqrt{256}} = \sqrt[4]{16} = 2.$
- $\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}}{\left(\frac{1}{10}\right)^{-1} - \left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}} = \frac{\left(\frac{3}{1}\right)^{2} + \left(\frac{2}{1}\right)^{1} + \left(\frac{5}{1}\right)^{1}}{\left(\frac{10}{1}\right)^{1} - \left(\frac{25}{1}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{9+2+5}{10-\sqrt{25}} = \frac{16}{5}.$

.

8.1.5. Resolvendo potências com expoente irracional

Não há uma maneira fácil de calcular potências com expoente irracional sem o uso de recursos tecnológicos, como calculadora científica, planilha eletrônica, entre outros. Esses números podem ser calculados apenas por aproximação.

Veja como exemplo, como calcular $3^{\sqrt{3}}$ na calculadora científica.



Inicialmente, tecle no número 3, em seguida no símbolo: ^ (que significa expoente), depois no símbolo $\sqrt{\ }$ seguido de 3. Ao teclar = (igual), a calculadora, conforme a imagem ao lado, mostrará o resultado: 6,704991854...

Assim: $3^{\sqrt{3}} = 3^{1,73205080\ldots} = 6{,}704991854\ldots$

EXERCÍCIOS 8.1

1) Resolva as potências:

a) 2^9

b) $(-3)^4$

c) $(-4)^{-2}$

d) 877777^0

e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

f) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-2}$

g) $(-3000)^0$

h) 0^{251}

i) 1^{5000}

j) $(-1)^{19}$

k) $(-1)^{32}$

l) $9^{\frac{-3}{2}}$

m) $\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{5}{2}}$

n) $\left((1024)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{-1}{5}}$

o) $\left((-1)^{\frac{1}{3}}\right)^{2048}$

p) $\sqrt[2]{\sqrt[5]{2^{30}}}$

q) $\left(\frac{\sqrt[5]{27^4}}{\sqrt[5]{9^4}} . 3^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{1}{2}}$

2) Resolva as expressões:

a) $2^0 - 5^1 + 5^0 - 3^1 + 3^0$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

c) $(-1)^{1000} + 1^{-1000} + (-1)^{991}$

d) $(-1)^{2n} - (-1)^{2n+1}$ (com $n \in \mathbb{N}$)

e) $\frac{2^1 + (-2)^2 + 2^2}{(-2)^2 + 2^0 + 7^0}$

f) $64^{\frac{2}{3}} + 9^{0,5} - 8^{\frac{1}{3}}$

g) $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{7}\right)^{-1}}{\left(\frac{1}{10}\right)^{-1} - \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}}$

h) $\sqrt{14 + \sqrt{117 + \sqrt{13 + \sqrt{9}}}}$

3) Escreva na forma de uma única potência:

a) $x^{\frac{7}{2}} . x^{\frac{3}{2}}$

b) $\sqrt[10]{[(x^{-2})^4]^{-5}}$

c) $\frac{x^{\frac{6}{5}}}{x^{\frac{1}{5}}}$

d) $\left(x^{\frac{-1}{2}}\right)^2$

e) $\frac{x^{n+3} . x^{n-1}}{(x^{n-1})^2}$

f) $\frac{3^{2n+1} . 3^{2n-1}}{(3^n)^2}$

4) (FATEC) Das três sentenças abaixo:

I. $2^{x+3} = 2^x . 2^3$ II. $(25)^x = 5^{2x}$ III. $2^x + 2^3 = 5^x$

a) somente a I é verdadeira;

b) somente a II é verdadeira;

c) somente a III é verdadeira;

d) somente a II é falsa;

e) somente a III é falsa

8.2. Definição de função exponencial

Definição 8.2.1: Denomina-se função exponencial qualquer função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$.

Veja alguns exemplos de função exponencial:

- $f(x) = 2^x$
- $g(x) = 5^x$
- $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
- $j(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
- $l(x) = \left(\sqrt{5}\right)^x$
- $m(x) = 1000^x$

É importante tecer alguns comentários sobre restrições para a base.

• A restrição $a > 0$ parte da premissa de que um número negativo ou o zero, elevado a qualquer número, poderá não existir dentro do conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$).

Exemplos: $(-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2}$ e $0^{-7} \notin \mathbb{R}$.

• A restrição $a \neq 1$ é pertinente, pois se $a = 1$, a função assumirá sempre o mesmo valor 1 para qualquer valor de x, e deste modo, deixará de ser função exponencial para ser uma função constante.

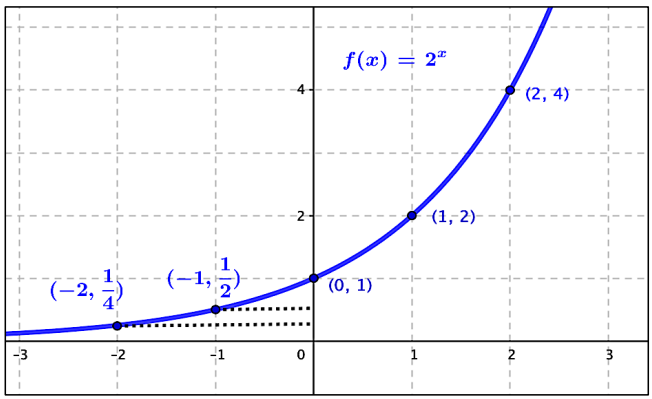
Portanto, para que a função na forma $f(x) = a^x$ seja exponencial é preciso que a base seja maior que zero e diferente de 1.

8.3. Gráfico da função exponencial

- **Gráfico na forma $f(x) = a^x$**

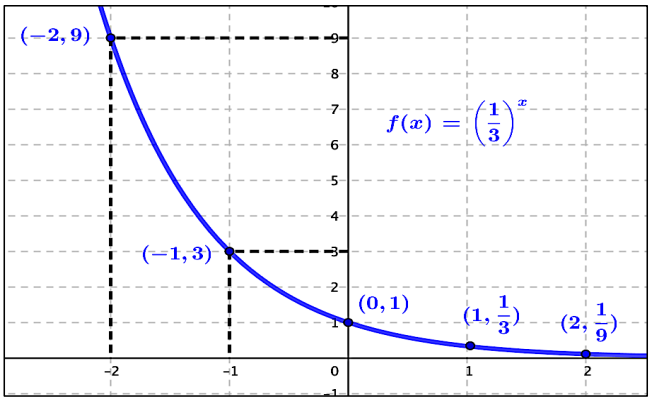
Atribuindo os mesmos valores habituais de x para construções de gráficos: $-2, -1, 0, 1, 2$, (mais uma vez, esses valores são de livre escolha) vamos construir o gráfico da função $f(x) = 2^x$:

x	2^x	y
-2	$2^{-2} = \frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{4}$
-1	$2^{-1} = \frac{1}{2^1}$	$\frac{1}{2}$
0	2^0	1
1	2^1	2
2	2^2	4



2º exemplo: Vamos construir o gráfico da função $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$:

x	$\left(\frac{1}{3}\right)^x$	y
-2	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{1}\right)^2$	9
-1	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = \left(\frac{3}{1}\right)^1$	3
0	$\left(\frac{1}{3}\right)^0$	1
1	$\left(\frac{1}{3}\right)^1$	$\frac{1}{3}$
2	$\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$\frac{1}{9}$



Características do gráfico na forma $f(x) = a^x$:

- **O gráfico sempre intersecta o eixo y no ponto 1**.

De fato, $f(x) = a^x$, como no eixo y o valor de x é zero, então $f(0) = a^0 = 1$. Constate essa informação nos dois exemplos anteriores.

- Se $a > 1$, a função é crescente (figura 8.3.1);

Demonstração: $a > 1 \Rightarrow a^h > 1^h \Rightarrow a^h > 1$ com $h>0$ e $h \in \mathbb{R}$. Multiplicando ambos os membros por a^x, tem-se: $a^x.a^h > a^x \Rightarrow a^{x+h} > a^x \Rightarrow f(x+h) > f(x)$.

Veja no 1º exemplo, que a função é crescente, pois $a > 1$.

- Se $0 < a < 1$, a função é decrescente (figura 8.3.2);

Veja no 2º exemplo, que a função é decrescente e $0 < a < 1$.

Demonstração análoga a anterior.

- O gráfico nunca toca ou intersecta o eixo x.

Com efeito, se $a > 1$ (crescente), então $a^x > 0$. Se $0 < a < 1$ (decrescente), então $a^x > 0$ para $x > 0$ e $a^x > 1$ para $x < 0$. Em todos os casos, temos $a^x > 0$, mostrando que o gráfico sempre ficará acima do eixo x, e embora se aproxime desse eixo, jamais irá tocá-lo ou intersectá-lo.

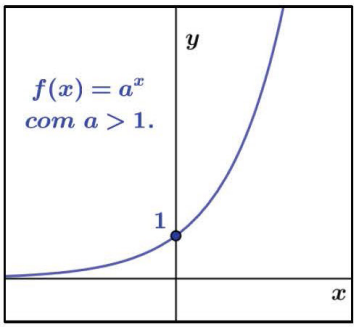


Figura 8.3.1

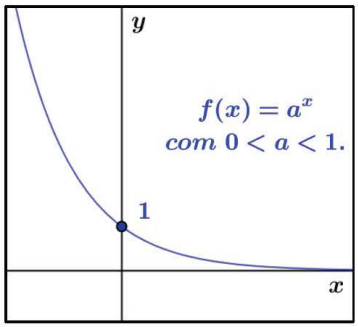


Figura 8.3.2

- **Gráfico na forma $f(x) = f_0.a^x$**

O gráfico da função exponencial na forma $f(x) = f_0.a^x$, tem as seguintes características:

- Intersecta o eixo y em f_0;

De fato, no eixo y, tem-se $x = 0$, logo $f(x) = f_0$.

- É crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$, seguindo os mesmos critérios da função original $f(x) = a^x$.

Exemplo: O gráfico da função $f(x) = 5.3^x$ na figura 8.3.3, intersecta o eixo y em $f = 5$ e é crescente, pois $a > 1$.

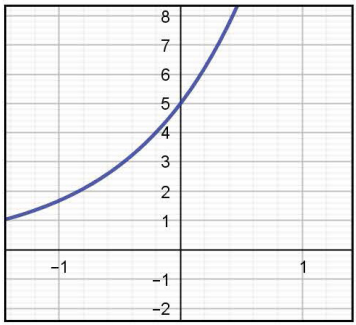


Figura 8.3.3

EXERCÍCIOS 8.2

1) Construa os gráficos:

a) $f(x) = 3^x$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

c) $f(x) = 5^x$

d) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2x}$

e) $f(x) = 3.2^x$

f) $f(x) = \frac{1}{3}.\left(\frac{1}{2}\right)^x$

2)(PUC-MG) Seja a função exponencial $f(x) = a^x$, é correto afirmar que:

a) Ela é crescente se $x > 0$;

b) Ela é crescente se $a > 0$;

c) Ela é crescente se $a > 1$;

d) Ela é decrescente se $a \neq 1$;

e) Ela é decrescente se $0 < x < 1$.

3)(SEDUC-GO - adaptada) Um estudo prevê um aumento na população de determinada cidade, para os próximos 20 anos, como indicado no gráfico que segue.

Pela análise do gráfico, o crescimento populacional no 16º ano é aproximadamente, em milhões, igual a:

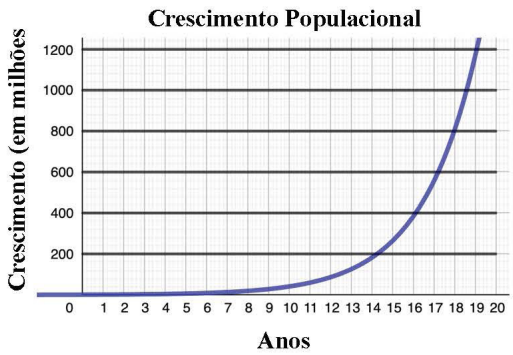
a) 400;

b) 600;

c) 800;

d) 1.000;

e) 1.200.



4)(UFJF) A figura abaixo é um esboço do gráfico da função $y = 2^x$ no plano cartesiano. Com base nesse gráfico, é correto afirmar que:

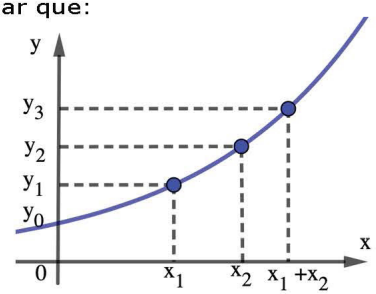
a) $y_0 = y_2 - y_1$

b) $y_1 = y_3 - y_2$

c) $y_1 = y_3 + y_0$

d) $y_2 = y_1 . y_0$

e) $y_3 = y_1 . y_2$



8.4. Equação exponencial

Equação exponencial é toda equação em forma de potência cujo expoente é uma expressão com incógnita. Embora haja várias formas de resolver uma equação exponencial, iremos basicamente utilizar os tipos de soluções a seguir.

1º tipo: Igualando as bases de ambos os membros.

1º exemplo: Resolver a equação $7^x = 49$.

Solução: Como o objetivo é igualar as bases, precisamos decompor o 49 e transformá-lo em base 7. Assim

$7^x = 49$

$7^x = 7^2$ (bases iguais cancelam e iguala o expoente)

$x = 2 \Rightarrow \boxed{S = \{2\}}$.

2º exemplo: $2^{x-2} = 256$.

Solução: Vamos decompor o 256 (veja o algoritmo a seguir) e, em seguida, transformá-lo em base 2, da seguinte maneira:

$2^{x-2} = 256$

$2^{x-2} = 2^8$

$x - 2 = 8$

$x = 8 + 2$

$x = 10$

$\boxed{S = \{10\}}$.

256	2
128	2
64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

2^8

Algoritmo da decomposição de um número: Primeiro é preciso buscar o menor número primo que divida o número desejado (comece com o 2, depois o 3, 5, 7, 11, 13, etc.) uma vez encontrado, faz-se divisões sucessivas até chegar ao quociente 1.

3º exemplo: $70^{2x-10} = 1$.

Solução: Como $70^0 = 1$, podemos fazer

$70^{2x-10} = 70^0$

$70^{2x-10} = 70^0$

$2x - 10 = 0$

$2x = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{2} \Rightarrow x = 5 \Rightarrow \boxed{S = \{5\}}$.

2º tipo: Substituindo uma potência com a incógnita desejada por uma incógnita auxiliar.

1º exemplo: Resolver a equação $5^{x+1} + 5^{x+2} = 30$.

Solução: Usando as propriedades de potências, dispomos de

$$5^x.5^1 + 5^x.5^2 = 30 \Rightarrow 5^x.5 + 5^x.25 = 30.$$

Utilizando uma incógnita auxiliar y, vamos fazer $5^x = y$. Ou seja, onde estiver 5^x iremos colocar y, do seguinte modo:

$$y.5 + y.25 = 30 \Rightarrow 5y + 25y = 30$$

$$30y = 30 \Rightarrow y = \frac{30}{30} \Rightarrow \boxed{y = 1}.$$

Substituindo em $5^x = y$, encontramos

$$5^x = 1 \Rightarrow 5^x = 5^0 \Rightarrow \boxed{x = 0} \Rightarrow \boxed{S = \{0\}}.$$

2º exemplo: Resolver a equação $4^x - 3.2^x + 2 = 0$.

Solução: Substituindo 4 por 2^2.

$(2^2)^x - 3.2^x + 2 = 0$

$2^{2x} - 3.2^x + 2 = 0$

$(2^x)^2 - 3.2^x + 2 = 0$

Na primeira potência houve uma troca do x pelo expoente 2, fazendo $2^x = y$)

$y^2 - 3.y + 2 = 0 \ (a = 1, b = -3 \ e \ c = 2)$

$\Delta = b^2 - 4.a.c$

$\Delta = (-3)^2 - 4.1.2$

$\Delta = 9 - 8$

$\Delta = 1$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2.1} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} y' = 2 \\ y'' = 1 \end{cases}$$

$$2^x = y \begin{cases} \text{Para } y = 2 \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow \boxed{x = 1} \\ \text{Para } y = 1 \Rightarrow 2^x = 1 \Rightarrow \boxed{x = 0} \end{cases} \Rightarrow \boxed{S = \{0, 1\}}.$$

É importante observar que todas soluções devem satisfazer suas respectivas equações (de qualquer tipo). Como exemplo, vamos verificar se de fato a solução $S = \{0, 1\}$ do exemplo anterior satisfaz sua equação $4^x - 3.2^x + 2 = 0$.

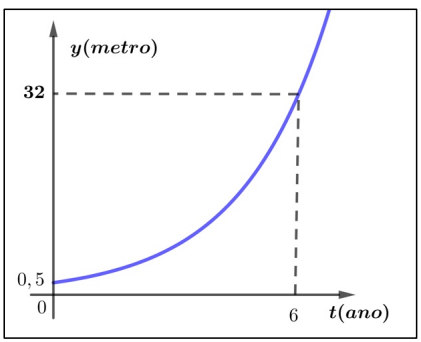
$Para \ x = 0 \Rightarrow 4^x - 3.2^x + 2 = 0 \Rightarrow 4^0 - 3.2^0 + 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 - 3.1 + 2 \Rightarrow 0 = 0 \ (ok!)$.

$Para \ x = 1 \Rightarrow 4^1 - 3.2^1 + 2 = 0 \Rightarrow 4 - 6 + 2 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \ (ok!)$.

Outros tipos:

1º exemplo: (ENEM) Admita que um tipo de eucalipto tenha expectativa de crescimento exponencial, nos primeiros anos após seu plantio, modelado pela função $y(t) = a^{t-1}$ na qual y representa a altura da planta em metro, t é considerado em ano, e a é uma constante maior que 1. O gráfico representa a função y.



Admita ainda que $y(0)$ fornece a altura da muda quando plantada, e deseja-se cortar os eucaliptos quando as mudas crescerem 7,5 m após o plantio. O tempo entre a plantação e o corte, em ano, é igual a

a) 3 b) 4 c) 6 d) $\log_2 7$ e) $\log_2 15$

Solução: Como $y(t) = a^{t-1} = a^t.a^{-1} = a^t.\frac{1}{a}$, a função pode ser expressa por $y(t) = \frac{1}{a}.a^t$, isto é, o valor inicial é $f_0 = \frac{1}{a}$, que pelo gráfico é 0,5 (altura da muda quando plantada). Assim,

$$\frac{1}{a} = 0{,}5 \Rightarrow \boxed{a = 2} \Rightarrow \boxed{y(t) = 2^{t-1}}$$

Outra forma de calcular o valor de a consiste em substituir o ponto (0;0,5) na função $y(t) = a^{t-1}$:

$$0{,}5 = a^{0-1} \Rightarrow \frac{1}{a} = 0{,}5 \Rightarrow \boxed{a = 2} \Rightarrow \boxed{y(t) = 2^{t-1}}.$$

Se o eucalipto cresceu 7,5m após o plantio, então sua altura será 8m (7,5 + 0,5). Substituindo na função, encontramos

$y(t) = 2^{t-1} \Rightarrow 8 = 2^{t-1} \Rightarrow \cancel{2}^3 = \cancel{2}^{t-1} \Rightarrow \boxed{t = 4}$ Resposta: letra b.

2º exemplo: (PUCC-SP) Numa certa cidade, o número de habitantes, num raio de r km a partir do seu centro é dado por $P(r) = k.2^{3r}$, em que k é constante e $r > 0$. Se há 98304 habitantes num raio de 5 km do centro, quantos habitantes há num raio de 3 km do centro?

Solução: Inicialmente, vamos substituir 98.304 e 5km, na função $P(r) = k.2^{3r}$, para encontrarmos a constante k.

$$P(r) = k.2^{3r} \Rightarrow 98.304 = k.2^{3.5} \Rightarrow 98.304 = k.2^{15} \Rightarrow k = \frac{98304}{2^{15}} = \frac{98304}{32768} \Rightarrow \boxed{k = 3}.$$

$$P(3) = 3.2^{3.3} \Rightarrow P(3) = 3.2^9 \Rightarrow P(3) = 3.512 \Rightarrow \boxed{P(3) = 1536}.$$

Resposta: 1.536 habitantes.

3º exemplo: Uma praga se prolifera de modo que, em cada dia, ela atinge uma área de plantio igual ao dobro da área atingida no dia anterior. Se uma praga atinge uma área em 30 dias, quantos dias serão necessários para que duas pragas dessa mesma espécie atinjam a mesma área?

Solução: No 1º dia, uma praga atinge um valor x, no 2º dia, $2.x$, no 3º dia, $4.x$, no 4º dia, $8.x$, e assim, sucessivamente. Duas pragas atingem $2x$ no 1º dia, no 2º dia, $4.x$, no 3º dia, $8.x$, etc. Para melhor entendimento, foi construída a tabela seguinte.

Nº de pragas	1º dia	2º dia	3º dia	4º dia	...	29º dia	30º dia
1 praga	x	$2x$	$4x$	$8x$	...	?	y
2 pragas	$2x$	$4x$	$8x$	$16x$	...	y	$2y$

Observe que os valores referentes as duas pragas são iguais aos valores de uma praga defasados por um dia. Resposta 30 -1 = 29 dias.

Uma solução algébrica: $2^x = 2.2^y \Rightarrow x = 1 + y$, para $x = 30 \Rightarrow \boxed{y = 29\ dias}$.

EXERCÍCIOS 8.3

1)Determine o conjunto solução das equações exponenciais:

a)$4^x = 1024$

b)$8^x = 128$

c)$3^x = \frac{1}{3}$

d)$7^x = \sqrt{7}$

e)$\left(\frac{1}{25}\right)^{2x} = \frac{1}{5}$

f)$3^{2x+1} = \frac{1}{81}$

g) $0{,}1^{(3x-1)} = \frac{1}{1000}$

h)$7^{x^2+7x} = 1$

i)$2^{x+1} + 2^{x+3} = 40$

j)$7^{x-1} + 7^{x+1} = 50$

k)$25^x - 30.5^x + 125 = 0$

l)$4^x - 12.2^x = -32$

2) (PUC-SP) A soma das raízes da equação $\frac{16^x+64}{5} = 4^{x+1}$ é:

a)1 b)3 c) 8 d)16 e)20

3) (UEMG-MG) Segundo dados de uma pesquisa, a quantidade de árvores de certa região vem decrescendo em relação ao tempo t, contado em anos, segundo a relação: $Q(t) = 10.000.\ 2^{-0,5.t}$. Sendo 10.000 a quantidade inicial e $Q(t)$ a quantidade t anos após, para que essa quantidade inicial fique reduzida à quarta parte, deverão transcorrer:

a) 2 anos b) 3 anos c) 4 anos d)5 anos

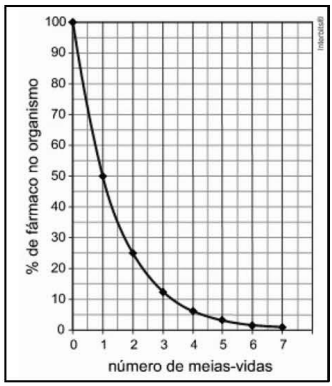
4)(ENEM) Suponha que o modelo exponencial $y = 363.e^{0,03x}$, em que $x = 0$ corresponde ao ano 2000, $x = 1$ corresponde ao ano 2001, e assim sucessivamente, e que y é a população em milhões de habitantes no ano x, seja usado para estimar essa população com 60 anos ou mais de idade nos países em desenvolvimento entre 2010 e 2050. Desse modo, considerando $e^{0,3} = 1,35$, estima-se que a população com 60 anos ou mais estará, em 2030, entre

a)490 e 510 milhões.
b)550 e 620 milhões.
c)780 e 800 milhões.
d)810 e 860 milhões.
e)870 e 910 milhões.

5) (ENEM) A duração do efeito de alguns fármacos esta relacionada a sua meia-vida, tempo necessário para que a quantidade original do fármaco no organismo se reduza a metade. A cada intervalo de tempo correspondente a uma meia-vida, a quantidade de fármaco existente no organismo no final do intervalo e igual a 50% da quantidade no inicio desse intervalo. O gráfico ao lado representa, de forma

genérica, o que acontece com a quantidade de fármacos no organismo humano ao longo do tempo. A meia-vida do antibiótico amoxicilina e de 1 hora. Assim, se uma dose desse antibiótico for injetada as 12 h em um paciente, o percentual dessa dose que restara em seu organismo as 13h30 min. será aproximadamente de:

a) 10%
b) 15%
c) 25%
d) 35%
e) 50%



6) A clorose variegada dos citros (CVC), causada pela bactéria Xylella fastidiosa é uma doença que afeta laranjeiras. Embora não haja nada comprovado, alguns estudos indicam que o déficit hídrico aumenta a severidade dos sintomas das plantas afetadas pela CVC. De um modo geral, as plantas de tratamento irrigado a 100% apresentam maior produção.

Fonte adaptada: (GONCALVES, 2010)

A relação entre CVC (em porcentagem) e a produção (kg de frutos assintomáticos/planta) pode ser descrita pela equação de regressão $y = 114.(2{,}71)^{-0{,}018x}$ e visualizada no gráfico a seguir.

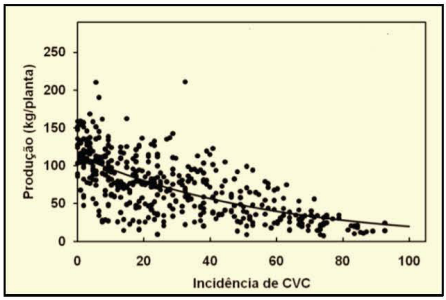


Imagem da fonte

a) Desenvolva uma equação equivalente a proposta, porém com expoente positivo.

b) Qual o valor de da produção para uma incidência de CVC de 60%.

7)(SEAPE) A lei $P(t) = 100(0{,}5)^t$ representa o percentual de agrotóxico P que age sobre a lavoura ao longo do tempo t, em horas. Qual é o percentual de agrotóxico que age sobre a lavoura em 2 horas?

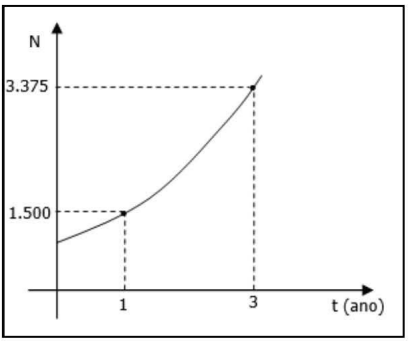
a) 250 b) 125 c) 100 d) 50 e) 25

8) (UFSM) As matas ciliares desempenham importante papel na manutenção das nascentes e estabilidade dos solos nas áreas marginais. Com o desenvolvimento do agronegócio e o crescimento das cidades, as matas ciliares vêm sendo destruídas. Um dos métodos usados para a sua recuperação é o plantio de mudas.

O gráfico mostra o número de mudas $N(t) = ba^t$ $(0 < a \neq 1$ e $b > 0)$ a serem plantadas no tempo t (em anos), numa determinada região.

De acordo com os dados, o número de mudas a serem plantadas, quando $t = 2$ anos, é igual a:

a) 2.137.
b) 2.150.
c) 2.250.
d) 2.437.
e) 2.500.



9) O gráfico a seguir mostra a relação exponencial entre a altura do dossel, de um consórcio D. ovalifolium-B. humidicola, e a radiação fotossinteticamente ativa (RFA) incidente no mesmo. Os dados correspondem ao tratamento de introdução da leguminosa através de plantio em sulcos, e foram obtidos em 24 de abril de 2004, entre 11:30 e 12:00 horas. Em destaque: altura média da leguminosa no dossel = 0,23 m, interceptação de RFA (calculada) pela leguminosa: 19% da incidência no topo do dossel.

Por ocasião da amostragem, a altura média do dossel, nesse tratamento, era de 0,53 m. Tomando-se como 100% a RFA incidente nessa altura.

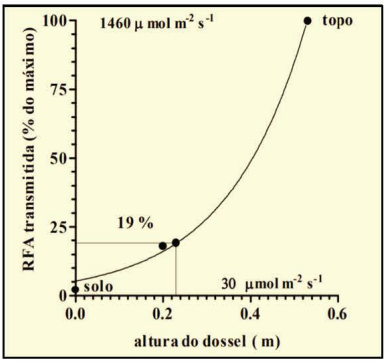


Imagem da fonte

Fonte: (RIBEIRO, 2006)

Qual a função exponencial que se ajusta ao experimento e qual o valor inicial da RFA?

10)Os dados a seguir foram coletados de um trabalho de modelagem matemática aplicada em um cultivo de alface, fazendo um comparativo entre os valores da massa média das mudas do experimento e da função exponencial, de acordo com o tempo (idade).

Tempo (dias)	Função exponencial	Experimento
25	0,39	0,39
36	1,496	0,62
48	6,494	4,22
70	96	96

Fonte adaptada: (HERRMANN, KINETZ e ELSNER, 2019)

Qual a função exponencial de ajuste para esse experimento (use os resultados 0,39 e 96 como parâmetros)?

8.5. Caracterização da função exponencial

As funções exponenciais são, assim como as funções afim e quadrática, modelos matemáticos que possuem caracterização. Já vimos que a função afim, possui taxa de variação constante, que a função quadrática possui a segunda taxa de variação constante (quando as abscissas estão em P.A) e agora vamos ver o que caracteriza uma função exponencial.

Acompanhe o seguinte exemplo de aplicação.

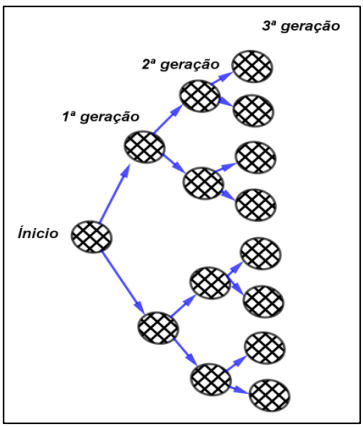
Exemplo: Escherichia coli é o nome de uma bactéria que habita o intestino de animais endotérmicos, cuja presença pode indicar aspectos relativos à qualidade da água e de alimentos. A E. coli também pode provocar doenças, como infecções urinárias, diarreia e a colite hemorrágica e síndrome hemolítico-urêmica.

Fonte: (ARAGUAIA, 2019)

Essa bactéria tem por característica a bipartição, ou seja, cada bactéria se divide em duas dando origem a primeira geração, e cada bactéria da primeira geração sofre bipartição, dando origem à segunda geração, e assim sucessivamente.

Quadro das gerações e valores:

x $(geração)$	y $(quant.de\ bactérias)$	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
0	1	–
2	4	$\frac{4-1}{2-0}=\frac{3}{2}$
4	16	$\frac{16-4}{4-2}=6$
6	64	$\frac{64-16}{6-4}=24$
8	256	$\frac{256-64}{8-6}=96$
10	1024	$\frac{1024-256}{10-8}=384$



A tabela foi construída propositalmente com os termos de x em progressão aritmética (P.A), vislumbrando algum padrão na taxa de variação. Percebe-se que a primeira taxa de variação não é igual e que a segunda taxa de variação também não será (verifique!). Entretanto, é possível observar um padrão entre os valores da primeira taxa de variação e os valores de y (1, 4, 16, 64, 256, 1024, ...), ambos formam uma progressão geométrica (P.G) de razão 4. Isso não é por acaso, veja a seguir.

Seja $(x_1, x_2, x_3 \dots)$ uma P.A de razão r em que $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_{n+1} - x_n = r$. As imagens de uma função na forma $f(x) = f_0.a^x$ formam uma P.G de razão a^r, pois:

$$\frac{f(x_2)}{f(x_1)} = \frac{f_0.a^{x_2}}{f_0.a^{x_1}} = a^{\overset{r}{\overbrace{(x_2 - x_1)}}} = a^r$$

$$\frac{f(x_3)}{f(x_2)} = \frac{f_0.a^{x_3}}{f_0.a^{x_2}} = a^{\overset{r}{\overbrace{(x_3 - x_2)}}} = a^r$$

$$\vdots$$

$$\frac{f(x_{n+1})}{f(x_n)} = \frac{f_0.a^{x_{n+1}}}{f_0.a^{x_n}} = a^{\overset{r}{\overbrace{(x_{n+1} - x_n)}}} = a^r$$

SAIBA MAIS!

De forma similar, demonstra-se que, se os termos de x estão em P.A e os termos de y estão em P.G, então a primeira taxa de variação também estará em P.G (inclusive de mesma razão). Porém, como são equivalentes, é mais prático e imediato verificar apenas se os termos de y estão em P.G.

Essa demonstração comprova em parte, o seguinte teorema.

Teorema 8.5.1 (Caracterização das funções exponenciais): Uma função (crescente ou decrescente) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ transforma toda progressão aritmética $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ de razão r numa progressão geométrica $(f(x_1), f(x_2), f(x_3)\dots)$de razão q se, e somente se, essa função for da forma $f(x) = f_0.a^x$, com $f_0 = f(0)$ e $a = \sqrt[r]{\frac{f(x_{n+1})}{f(x_n)}} = \sqrt[r]{q}$.

Como aplicação desse teorema, retomaremos o exemplo da quantidade de bactérias Escherichia coli.

A P.A (0, 2, 4, 6, 8, 10, ...) possui razão $r = 2$ e observando a P.G (1, 4, 16, 64, 256, 1024, ...) da tabela, temos:

$f_0 = f(0) = 1$,

$$a = \sqrt[r]{\frac{f(x_{n+1})}{f(x_n)}} = \sqrt[2]{\frac{4}{1}} = 2 \quad \Rightarrow \quad f(x) = f_0.a^x \Rightarrow f(x) = 1.2^x \Rightarrow \boxed{f(x) = 2^x}.$$

Faça os testes dos valores da tabela com essa função e comprove!

Para demonstrar a suficiência desse teorema, precisamos de outro teorema que está a seguir.

Teorema 8.5.2: Seja uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ crescente ou decrescente. As seguintes afirmações são equivalentes:

1- $f(nx) = f(x)^n$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$ e $\forall\, x \in \mathbb{R}$;

2- $f(x) = a^x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ onde $a = f(1)$;

3- $f(x + y) = f(x).f(y)$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Provaremos que 1 implica em 2, que 2 implica em 3 e 3 implica em 1.

A hipótese 1, acarreta que para todo número racional $r = \frac{}{n}$ $(m, n \in \mathbb{Z})$, tem-se $f(rx) = f(x)^r$. Com efeito, $m = n.r$ e $f(rx)^n = f(nrx) = f(mx) = f(x)^m$, logo $f(rx) = f(x)^{\frac{m}{n}} = f(x)^r$.

Pondo $f(1) = a$, temos: $f(r) = f(r.1) = f(1)^r = a^r (\forall\, r \in \mathbb{Q})$.

Agora, para fixar as ideias, suponhamos que f seja crescente, e que por absurdo, tenhamos para $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq a^x$. Se $f(x) < a^x$, então existe em $\mathbb{R}^+$ um a^r $(r \in \mathbb{Q})$ tal que $f(x) < a^r < a^x$, ou seja, $f(x) < f(r) < a^x$. Como f é crescente, conclui-se que $x < r$. Entretanto, $a^r < a^x$, o que implica em $r < x$ e uma contradição. Provando que a hipótese 1 implica em 2.

Por conseguinte, $f(x + y) = a^{x+y} = a^x.a^y = f(x).f(y)$.

O que prova que a hipótese 2 implica em 3.

Por fim, $f(nx) = f(\overbrace{x + x + x + \ldots x}^{n\ vezes}) = \overbrace{f(x).f(x).f(x)\ldots f(x)}^{n\ vezes} = f(x)^n$.

Demonstrando todas as implicações.

Agora sim, podemos demonstrar a suficiência do teorema 8.5.1.

Fazendo $f_0 = f(0)$. A função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$definida por $g(x) = f(x)/f_0$, é monótona injetiva (crescente ou decrescente), transformando progressões aritméticas em progressões geométricas sendo $g(0) = 1$. Dado $x \in \mathbb{R}$, a sequência $(x, 0, -x)$ é uma progressão aritmética de razão $r = -x$ e $(g(x), 1, g(-x))$ é uma progressão geométrica de razão $g(-x)$. Portanto, $g(-x) = 1/g(-x)$.

Sejam agora $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$. A sequência $(0, x, 2x, \ldots, nx)$ é uma progressão aritmética, logo $(1, g(x), g(2x), \ldots, g(nx))$ é uma progressão geométrica cuja razão é $g(x)$. Então, seu $(n + 1)$-ésimo termo é $g(nx) = g(x)^n$. Se $-n$ é um termo negativo, então $g(-nx) = 1/g(nx) = 1/g(x)^n = g(x)^{-n}$. Portanto, vale $g(nx) = g(x)^n$ para qualquer $n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$. Assim, pelo teorema 8.5.2, concluímos que para $a = g(1) = f(1)/f(0)$, tem-se $g(x) = a^x$, ou seja, $f(x) = f_0.a^x$.

A caracterização do teorema 8.5.1 requer abscissas em P.A. Caso não estejam, basta aplicar a definição em todos os pontos

$$\boxed{f(x_n) = f_0.a^{x_n}} \; e \; \boxed{f(x_{n-1}) = f_0.a^{x_{n-1}}}$$

E verificar se

$$\frac{f(x_n)}{f(x_{n-1})} = \frac{a^{x_n}}{a^{x_{n-1}}} \Rightarrow \boxed{a = \sqrt[x_n - x_{n-1}]{\frac{f(x_n)}{f(x_{n-1})}}} \; é\ constante.$$

2º exemplo: Seja a função exponencial $f(x) = 7.3^x$ e a P.A (0,3,6,9,12,...), substituindo os termos da P.A na função, temos:

$f(0) = 7.3^0 = 7 \Leftarrow f_0$ $\quad$ $f(9) = 7.3^9 = 137781$

$f(3) = 7.3^3 = 189$ $\quad$ $f(12) = 7.3^{12} = 3720087$

$f(6) = 7.3^3 = 5103$

A sequência (7, 189, 5103, 137781, 3720087,...) é uma progressão geométrica (P.G) de razão $\frac{189}{7} = 27$. Vê-se imediatamente que: $f_0 = f(0) = 7$ e $a = \sqrt[r]{q} = \sqrt[3]{27} = 3$.

3º exemplo: Os dados e o gráfico a seguir a seguir mostram as razões do teor de água das folhas de *Hyptis suaveolens* para as temperaturas e velocidades do ar estudadas em função do tempo. Nota-se que o tempo de secagem das folhas decresce com o aumento da temperatura do ar, e que o processo de secagem ocorreu de maneira similar para ambas as velocidades de ar estudadas.

x (tempo horas)	y (razão do teor de água)
0	0,9
3	0,1125
6	0,0140625
9	0,001757813

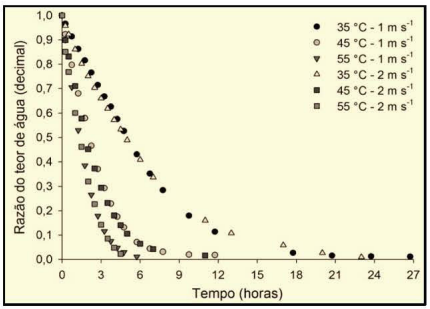


Imagem da fonte

Fonte adaptada: (ALVES, RESENDE, *et al.*, 2017)

Calcule a função de ajuste para esse experimento.

Solução: Uma vez que os valores de x estão em P.A (de razão $r = 3$), vamos verificar se os valores de y estão em P.G

$$\frac{0,1125}{0,9} = 0,125; \frac{0,0140625}{0,1125} = 0,125 \; e \; \frac{0,001757813}{0,0140625} = 0,125.$$

É uma P.G de razão $q = 0,125$, então a base é $a = \sqrt[3]{0,125} = 0,5$ ou $\frac{1}{2}$.

Como $f_0 = f(0) = 0,9$ a função é $f(x) = f_0.a^x \Rightarrow \boxed{f(x) = 0,9.\left(\frac{1}{2}\right)^x}$.

Fazendo os testes: $f(0) = 0,9.\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 0,9 \,.\, 1 = 1$ Ok!

$f(3) = 0,9.\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0,9 \,.\, 0,125 = 0,1125$ Ok!

$f(6) = 0,9.\left(\frac{1}{2}\right)^6 = 0,9 \,.\, 0,015625 = 0,0140625$ Ok!

$f(9) = 0,9.\left(\frac{1}{2}\right)^9 = 0,9 \,.\, 0,001953125 = 0,001757813$ Ok!

4º exemplo: Depreciação ou desvalorização corresponde ao encargo periódico que determinados bens sofrem, por uso, obsolescência ou desgaste natural. Uma máquina agrícola possui taxa de depreciação de 10% ao ano. Sua nota fiscal de compra está datada do ano de 2019 no valor de R$ 120.000,00.

a) Quanto custará essa máquina em 2022?

Solução:

Em 2020 seu valor será:
10% de 120.000,00 = 12.000,00
120.000,00 – 12.000,00 = 108.000,00 ⇨

Em 2021 seu valor será:
10% de 108.000,00 = 10.800,00
108.000,00 – 10.800,00 = 97.200,00 ⇨

Em 2022 seu valor será:
10% de 97.200,00 = 9.720,00
97.200,00 – 9.720,00 = 87.480,00

Tabulando as informações:

x (ano)	0	1	2	3
y (valor)	120.000,00	108.000,00	97.200,00	87.480,00

Podemos observar que os valores de y estão em P.G de razão

$$\frac{108.000}{120.000} = \frac{97.200}{108.000} = \ldots = 0{,}9.$$

Logo, a função exponencial é

$$f(x) = f_0 . a^x \Rightarrow \boxed{f(x) = 120000.(0{,}9)^x}.$$

De uma forma geral, para uma taxa de depreciação i e tempo x, temos sempre

$$\boxed{f(x) = f_0 . (1 - i)^x}.$$

b) Em quanto tempo seu valor atingirá a metade do valor de compra?

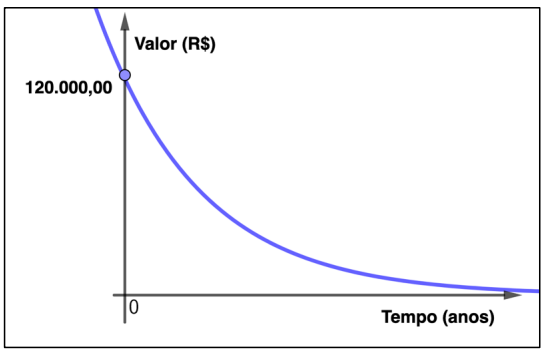
Solução:

$$f(x) = 120000.(0{,}9)^x \Rightarrow 60000 = 120000.(0{,}9)^x \Rightarrow$$
$$\frac{60000}{120000} = 120000.(0{,}9)^x \Rightarrow \boxed{0{,}5 = (0{,}9)^x}.$$

Utilizando uma calculadora encontramos: $(0{,}9)^6 \cong 0{,}53$ e $(0{,}9)^7 \cong 0{,}47$. O que significa que x está entre 6 e 7 anos e o tempo entre: $2019 + 6 = 2025$ *e* $2019 + 7 = 2026$.

Resposta: entre 2025 e 2026.

Veja o gráfico valor × tempo ao lado:



EXERCÍCIOS 8.4

1)Seja a função exponencial $f(x) = 2.\left(\frac{1}{3}\right)^x$ e a P.A (-4,-2,0,2,4,...), substitua os termos da P.A na função e encontre a P.G gerada.

2)Com base nos dados das tabelas a seguir, encontre a função exponencial que se enquadra em cada item e esboce o gráfico:

a)

x	1	2	3	4
y	6	1,2	0,24	0,048

b)

x	0	2	5	8
y	4	100	12500	1562500

3) Um trabalho foi realizado com o objetivo de estudar o crescimento em diâmetro, volume comercial, fator de forma comercial e incremento corrente anual do volume comercial em porcentagem (ICA%) para duas árvores dominantes de canelapreta (Nectandra megapotamica), em uma Floresta Estacional Decidual, localizada no município de Santa Maria na depressão central do Estado do Rio Grande do Sul. Considere que os dados a seguir refere-se a uma das árvores:

x (tempo em anos)	0	20	40	60
y (diâmetro em cm)	0	5	25	?

Fonte adaptada: (TONINI, FINGER e SCHNEIDER, 2003)

Qual o diâmetro em cm dessa árvore em 60 anos?

4)Um teste de campo foi desenvolvido em Dourados, Estado do Mato Grosso do Sul, e teve como objetivo avaliar as características de infiltração de água no solo em três diferentes sistemas de cultivo: pastagem (Sistema A); aveia cultivada sob o sistema de plantio direto (Sistema B); e pastagem contínua (Sistema C).

Considere os dados observados no sistema A:

$Tempo$ (min)	0	10	30	50
$Taxa\ de\ infiltração\ (mm\ h^{-1})$	100	40	6,4	1,024

Fonte adaptada: (PANACHUKI, SOBRINHO, *et al.*, 2006)

Calcule a função exponencial que se ajusta aos testes, sabendo que ela é da forma $f(x) = f_0.a^{\frac{x}{10}}$.

5)O Brasil está entre os 3 maiores produtores de soja no mundo, e é o país que apresenta o maior potencial de expandir as áreas cultivadas, podendo aumentar exponencialmente a produção.

Considerando os dados aproximados da produção de soja do Brasil por ano, da tabela a seguir.

Ano	1970	1980	1990	2000
Produção em milhões de toneladas	7,2	15,12	31,752	66,6792

Fonte adaptada: (DALL'AGNOL, 2017)

a) Qual a função exponencial que se ajusta aos dados?

b) Quais as estimativas para 2010 e 2020?

6)A produção de grãos de uma determinada região tem sido crescente. Os dados da tabela a seguir mostram a produção anual em milhões de toneladas.

Ano	2018	2019	2020
Produção em milhões de toneladas	1,3	23,4	?

a) Quais as projeções para 2020 supondo um crescimento linear?

b) Quais as projeções para 2020 supondo um crescimento exponencial?

7) Considere a depreciação de um veículo em torno de 20% ao ano. Se seu valor de compra foi de R$ 50.000,00.

a) Quanto custará daqui a 5 anos?

b) Em quanto tempo ele custará R$ 5.000,00?

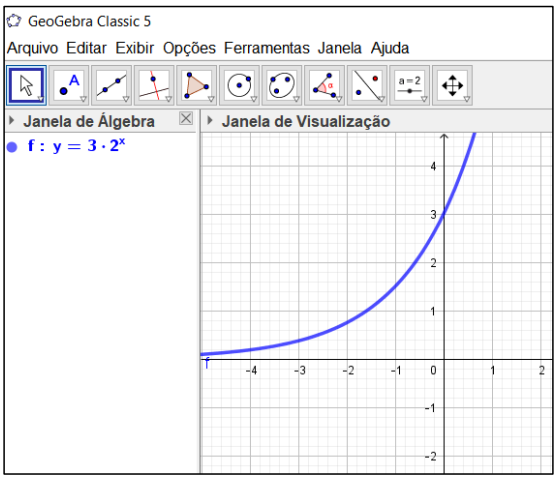
8)Supondo que a produção de soja de uma determinada região gira em torno de 5 mil toneladas e cresce exponencial a taxa de 10% ao ano.

a) Quanto será a produção após 4 anos?

b) Em quanto tempo essa produção terá seu valor dobrado?

8.6. Gráfico da função exponencial no geogebra

No campo de entrada do aplicativo digite a função usando "^" para representar o expoente da potência. Exemplo: 3.2^x se escreve assim: 3*2^x. Em seguida, o aplicativo mostrará o gráfico da função:



CAPÍTULO

9

FUNÇÃO LOGARÍTMICA

FUNÇÃO LOGARÍTMICA

9. FUNÇÃO LOGARÍTMICA

9.1. Logaritmo

A palavra "logaritmo" tem origem grega, onde "logos" significa razão e "aritmo" significa número. Foi inicialmente desenvolvida por John Napier (1550-1617) e aperfeiçoada por Henry Briggs (1561-1630). Os logaritmos possuem várias aplicações na Física, como na escala logarítmica que mede a intensidade de sons em decibéis, na Química para o cálculo do pH (potencial hidrogeniônico), na Geologia para a medição de abalos sísmicos, entre outras ciências, incluindo as ciências agrárias. Sua aplicação é relevante em situações que envolvem números elevados ou muito pequenos, pois permite transformar produtos em soma e quocientes em diferença, o que facilita os cálculos, a interpretação e a construção de gráficos.

Definição 9.1.1: Chama-se logaritmo de b na base a o expoente ao qual se deve elevar a base a para obter o número b. Simbolicamente, escreve-se:

$$log_a b = x \iff a^x = b$$

Em que a é denominada de **base**, b de **logaritmando** e x, é o próprio logaritmo (resultado).

Para que o logaritmo dessa definição exista é preciso que $0 < a \neq 1$, $b > 0$ e $a, b \in \mathbb{R}$. Essas condicionantes estão interligadas com a existência da função exponencial (ver os comentários da definição 8.2.1).

Exemplos imediatos:

- $log_2 8 = 3$ (o logaritmo de 8 na base 2 é 3), pois $2^3 = 8$.
- $log_3 9 = 2$ (o logaritmo de 9 na base 3 é 2), pois $3^2 = 9$.
- $log_{10} 1 = 0$ (o logaritmo de 1 na base 10 é 0), pois $10^0 = 1$.
- $log_{49} 7 = \frac{1}{2}$ (o logaritmo de 49 na base 7 é $\frac{1}{2}$), pois $49^{\frac{1}{2}} = 7^{2 \cdot \frac{1}{2}} = 7^1 = 1$.

Exemplos resolvidos:

1º exemplo: Calcule usando a definição os seguintes logaritmos.

a) $log_9 27$

Solução: $log_9 27 = x \Rightarrow 9^x = 27 \Rightarrow (3^2)^x = 3^3 \Rightarrow 3^{2x} = 3^3 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow \boxed{x = \frac{3}{2}}$.

b) $log_{\frac{1}{4}} \sqrt{2}$

Solução: $log_{\frac{1}{4}} \sqrt{2} = x \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^x = \sqrt{2} \Rightarrow (4^{-1})^x = 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 4^{-x} = 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$

$(2^2)^{-x} = 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2^{-2x} = 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow -2x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\frac{1}{2}}{-2} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-2} \Rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{4}}$.

c) $log_{0,25} 16$

Solução: $log_{0,25} 16 = x \Rightarrow (0,25)^x = 16 \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^x = 16 \Rightarrow$

$4^{-x} = 4^2 \Rightarrow -x = 2 \Rightarrow \boxed{x = -2}$.

d) $log_{\frac{5}{4}} \sqrt[4]{\frac{125}{64}}$

Solução: $log_{\frac{5}{4}} \sqrt[4]{\frac{125}{64}} = x \Rightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^x = \sqrt[4]{\frac{125}{64}} \Rightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^x = \sqrt[4]{\frac{5^3}{4^3}} \Rightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^x = \left(\frac{5^{\frac{3}{4}}}{4^{\frac{3}{4}}}\right) \Rightarrow$

$\left(\frac{5}{4}\right)^x = \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{4}} \Rightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^x = \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{4}} \Rightarrow \boxed{x = \frac{3}{4}}$.

2º exemplo: Calcule o valor de x, nos seguintes casos.

a) $log_2 x = 4$

Solução: $log_2 x = 4 \Rightarrow 2^4 = x \Rightarrow \boxed{x = 16}$.

b) $log_5 5x = 2$

Solução: $log_5 5x = 2 \Rightarrow 5^2 = 5x \Rightarrow x = \frac{25}{5} \Rightarrow \boxed{x = 5}$.

c) $log_x 81 = 2$

Solução: $log_x 81 = 2 \Rightarrow x^2 = 81 \Rightarrow x = \pm\sqrt{81} \Rightarrow \boxed{x = 9}$.

Observação: Como x representa a base do logaritmo, e a base de um logaritmo precisa ser maior que 0 e diferente de 1, considera-se apenas a solução positiva.

d) $log\, x = -3$

Solução: Como a base está omitida, temos o 10 na base (base decimal). Assim:

$log_{10} x = -3 \Rightarrow 10^{-3} = x \Rightarrow x = \frac{1}{10^3} \Rightarrow$

$x = \frac{1}{1000} \Rightarrow \boxed{x = 0,001}$.

SAIBA MAIS!

Costuma-se omitir a base do logaritmo quando ela é igual a 10 (base decimal).

EXERCÍCIOS 9.1

1) Utilizando a definição, calcule os logaritmos:

a) $log_4 256$
b) $log_{27} 243$
c) $log_{0,25} 1024$
d) $log_7 \frac{1}{49}$
e) $log_{\frac{1}{5}} 625$
f) $log\, 0{,}0001$
g) $log_{\frac{1}{3}} \sqrt[5]{729}$
h) $log_{0,5} \sqrt[8]{512}$
i) $log_{\sqrt{7}} \frac{7}{\sqrt[4]{49}}$
j) $log\ 10\sqrt[3]{10}$
k) $log_4(log\, 100)$

2) Calcule o valor de x, nos seguintes casos:

a) $log_9 x = 3$
b) $log_{\sqrt[4]{9}} x = 2$
c) $log_{2x} 216 = 3$
d) $log_{(x+2)} 36 = 2$

3) (U. E. LONDRINA) Supondo que exista, o logaritmo de a na base b é:

a) o número ao qual se eleva a para se obter b.
b) o número ao qual se eleva b para se obter a.
c) a potência de base b e expoente a.
d) a potência de base a e expoente b.
e) a potência de base 10 e expoente a.

9.1.1. Consequências da Definição de Logaritmo

De acordo com a definição de logaritmo, podemos estabelecer que:

- $\boxed{log_a 1 = 0}$, para $a > 0$ e $a \neq 1$.

Se o logaritmando for igual a 1, o logaritmo será zero.

Pois: $a^0 = 1$.

- $\boxed{log_a a = 1}$, para $a > 0$ e $a \neq 1$.

Se o logaritmando e a base forem iguais, o logaritmo será 1.

Uma vez que: $a^1 = a$.

- $\boxed{log_a a^n = n}$, para $a > 0, a \neq 1$ e $n \in \mathbb{R}$.

Se o logaritmando for uma potência de base igual a base do logaritmo, então o resultado será o expoente da potência.

Por definição: $a^n = a^x$, o que implica em $x = n$.

- $\boxed{log_a b = log_a c \Leftrightarrow b = c}$, para $a > 0, b > 0, c > 0$ e $a \neq 1$.

Fazendo: $log_a b = x$ e $log_a c = x$, temos: $a^x = b$ e $a^x = c \Leftrightarrow b = c$.

Dois logaritmos de mesma base são iguais, quando seus logaritmandos são também iguais.

- $\boxed{a^{log_a b} = b}$, para $a > 0, b > 0$ e $a \neq 1$.

Sendo $log_a b = x \Rightarrow a^x = b$, substituindo o x, temos: $a^{log_a b} = b$.

Se o expoente de uma potência for um logaritmo de mesma base dessa potência, então essa potência tem como resultado o logaritmando.

9.1.2. Propriedades dos Logaritmos

Para todo $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ e $a \neq 1$, temos:

1ª propriedade (P1): logaritmo do produto.

$$log_a(b_1.b_2.b_3.\ldots b_n) = log_a\, b_1 + log_a\, b_2 + log_a\, b_3 + \ldots + log_a\, b_n$$

Demonstração: Fazendo

$$log_a\, b_1 = x_1,\ log_a\, b_2 = x_2,\ log_a\, b_3 = x_3, \ldots,\ log_a\, b_n = x_n$$

e usando definição, temos

$$a^{x_1} = b_1,\ a^{x_2} = b_2,\ a^{x_3} = b_3, \ldots, a^{x_n} = b_n.$$

Substituindo em $log_a(b_1.b_2.b_3.\ldots b_n)$, encontramos

$$log_a(a^{x_1}.a^{x_2}.a^{x_3} \ldots a^{x_n}) = log_a(a^{x_1+x_2+x_3+\ldots x_n}) = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots x_n$$

$$log_a\, b_1 + log_a\, b_2 + log_a\, b_3 + \ldots + log_a\, b_n.$$

Exemplos:

- $log_2 8 = log_2 2.2.2 = log_2 2 + log_2 2 + log_2 2 = 1 + 1 + 1 = 3.$
- $log\, 6 = log\, 2.3 = log\, 2 + log\, 3.$

2ª propriedade(P2): logaritmo do quociente.

$$log_a\left(\frac{b}{c}\right) = log_a\, b - log_a\, c$$

Demonstração:

Fazendo $log_a\, b = x_1$ e $log_a\, c = x_2$ e usando a definição, temos: $a^{x_1} = b$ e $a^{x_2} = c$. Substituindo em: $log_a\left(\frac{b}{c}\right)$, encontramos

$$log_a\left(\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}}\right) = log_a\, a^{x_1 - x_2} = x_1 - x_2 = log_a\, b - log_a\, c\,.$$

De uma maneira geral: $log_a\left(\frac{b_1.b_2.b_3.\ldots.b_n}{c_1.c_2.c_3.\ldots.c_m}\right) =$

$$log_a\, b_1 + log_a\, b_2 + log_a\, b_3 + \ldots + log_a\, b_n - (log_a\, c_1 + log_a\, c_2 + log_a\, c_3 + \ldots + log_a\, c_m)$$

Basta aplicar a 1ª e a 2ª propriedade simultaneamente.

Exemplos:

- $log_2 5 = log_2 \frac{10}{2} = log_2 10 - log_2 2.$
- $log_2 \frac{4.12}{9} = log_2 4 + log_2 12 - log_2 9.$

3ª propriedade(P3): logaritmo da potência.

$$log_a\, b^n = n.log_a\, b$$

Demonstração:

Fazendo $\log_a b^n = x$ e $\log_a b = y$, temos que: $\boxed{a^x = b^n}$ (1) e $\boxed{a^y = b}$ (2). Elevando a n ambos os membros de (2), obtemos: $(a^y)^n = b^n$. Substituindo em (1), encontramos

$$(a^y)^n = a^x \Rightarrow x = y.n \quad \Rightarrow \quad \boxed{\log_a b^n = n.\log_a b}, \text{ com } n \in \mathbb{R}.$$

Exemplo:

- $\log_7 49 = \log_7 7^2 = 2.\underbrace{\log_7 7}_{1} = 2.1 = 2.$

As propriedades de transformar produtos em soma e divisão em subtração, além de nos fornecer técnicas úteis para o desenvolvimento e cálculo de logaritmos, foram as principais motivações para a introdução dos logaritmos nos estudos científicos. Veja nos exemplos a seguir a aplicação dessa técnica.

SAIBA MAIS!

Representa-se o produto de um número x por um logaritmo $\log_a b$, usando o x antes do logaritmo: $x \,.\log_a b$. A fim de evitar confusões com $\log_a b \,.x$ (logaritmo de $b.x$ na base a).

1º exemplo: Sabendo que $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$, calcule:

a) $\log 6$

Solução: $\log 6 = \log 2.3 = \underbrace{\log 2}_{a} + \underbrace{\log 3}_{b} = a + b.$

b) $\log 48$

Solução: $\log 48 = \log 2^4.3 = 4.\underbrace{\log 2}_{a} + \underbrace{\log 3}_{b} = 4a + b.$

c) $\log 5$

Solução: $\log \frac{10}{2} = \underbrace{\log 10}_{1} - \underbrace{\log 2}_{a} = 1 - a.$

d) $\log 60$

Solução: $\log 60 = \log 2.3.10 = \underbrace{\log 2}_{a} + \underbrace{\log 3}_{b} + \underbrace{\log 10}_{1} = a + b + 1.$

Analise esses exemplos e perceba que, devido à inexistência de propriedades para soma e subtração, optou-se por relacionar os números utilizando as operações de multiplicação, divisão e potenciação.

2º exemplo: Sendo $\log_3 a = 7$ e $\log_3 b = 2$, calcule:

a) $\log_3 \frac{a^4}{9b^3}$

Solução: $\log_3 \frac{a^4}{9b^3} = \log_3 a^4 - \log_3 9.b^3 = 4.\log_3 a - \log_3 3^2 - \log_3 b^3 =$

$4.\overbrace{\log_3 a}^{7} - 2.\underbrace{\log_3 3}_{1} - 3.\underbrace{\log_3 b}_{2} = 4.7 - 2.1 - 3.2 = 28 - 2 - 6 = 20.$

b) $log_3 \frac{\sqrt[5]{a^4.b^2}}{\sqrt[7]{27.a^{-3}.b^3}}$

Solução: $log_3 \frac{\sqrt[5]{a^4.b^2}}{\sqrt[7]{27.a^{-3}.b^3}} = log_3 \frac{a^{\frac{4}{5}}.b^{\frac{2}{5}}}{3^{\frac{3}{7}}.a^{\frac{-3}{7}}.b^{\frac{3}{7}}} = log_3 \frac{a^{\frac{4}{5}+\frac{3}{7}}.b^{\frac{2}{5}-\frac{3}{7}}}{3^{\frac{3}{7}}} =$

$log_3 \frac{a^{\frac{4.7+3.5}{35}}.b^{\frac{2.7-3.5}{35}}}{3^{\frac{3}{7}}} = log_3 \frac{a^{\frac{28+15}{35}}.b^{\frac{14-15}{35}}}{3^{\frac{3}{7}}} = log_3 \frac{a^{\frac{43}{35}}.b^{\frac{-1}{35}}}{3^{\frac{3}{7}}} =$

$log_3 a^{\frac{43}{35}} + log_3 b^{\frac{-1}{35}} - log_3 3^{\frac{3}{7}} = \frac{43}{35}.\overbrace{log_3 a}^{7} - \frac{1}{35}.\underbrace{log_3 b}_{2} - \frac{3}{7}.\underbrace{log_3 3}_{1} =$

$\frac{43}{35}.7 - \frac{1}{35}.2 - \frac{3}{7} = \frac{43}{5} - \frac{2}{35} - \frac{3}{7} = \frac{43.7-2-3.5}{35} = \frac{301-2-15}{35} = \boxed{\frac{284}{35}}$.

3º exemplo: Usando os valores aproximados de $log\,2 \cong 0{,}30$, $log\,3 \cong 0{,}47$ e $log\,7 \cong 0{,}85$, resolva as seguintes equações:

a) $10^x = 20$

Solução: Usando a definição $\boxed{log_a b = log_a c \iff b = c}$, para $a > 0, b > 0, c > 0$ e $a \neq 1$, podemos "logaritmar" ambos os membros de qualquer equação. Como as informações a serem usadas estão na base 10, o logaritmo a ser usado deve ser o decimal.

$10^x = 20 \Rightarrow log\,10^x = log\,20 \Rightarrow x\underbrace{log\,10}_{1} = log\,2.10 \Rightarrow$

$x = \underbrace{log\,2}_{0{,}3} + \underbrace{log\,10}_{1} \Rightarrow x = 0{,}3 + 1 \Rightarrow \boxed{x \cong 1{,}3}$.

$10^{1{,}3} \cong 19{,}952$. ← Use uma calculadora científica para confirmar o resultado.

b) $210^{2x} = 5$

Solução: Observe que não é possível reduzir os membros à mesma base, assim vamos "logaritmar" ambos os membros:

$210^{2x} = 5 \Rightarrow log\,210^{2x} = log\,5 \Rightarrow 2x.log\,3.7.10 = log\frac{10}{2} \Rightarrow$

$2x.(log\,3 + log\,7 + log\,10) = log\,10 - log\,2 \Rightarrow 2x.(0{,}47 + 0{,}85 + 1) = 1 - 0{,}3 \Rightarrow$

$2x.2{,}32 = 0{,}7 \Rightarrow x.4{,}64 = 0{,}7 \Rightarrow x = \frac{0{,}7}{4{,}64} \Rightarrow \boxed{x \cong 0{,}15}$.

4º exemplo: (UCSAL) Se $12^{n+1} = 3^{n+1}.8$, então $log_2 n$ é igual a:

a) -2 b) -1 c)1/2 d) 1 e) 2

Solução: Desenvolvendo $(3.2^2)^{n+1} = 3^{n+1}.\ 2^3 \Rightarrow 3^{n+1}.2^{2n+2} = 3^{n+1}.\ 2^3 \Rightarrow$

$2^{2n+2} = 2^3 \Rightarrow 2n + 2 = 3 \Rightarrow \boxed{n = \frac{1}{2}}$.

$log_2 n = log_2 \frac{1}{2} = x \Rightarrow 2^x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^x = 2^{-1} \Rightarrow \boxed{x = -1}$ (letra b).

EXERCÍCIOS 9.2

1) Sabendo que $log\,2 = a$, $log\,3 = b$ e $log\,7 = c$, calcule:

a) $log\,60$

b) $log\,42$

c) $log\,35$

d) $log\,\sqrt[4]{105}$

2) Sendo $log_5 a = 3$ e $log_5 b = 2$, calcule:

a) $log_5 \dfrac{a^3}{25b^7}$

b) $log_5 \dfrac{\sqrt[5]{a^3.b}}{\sqrt[3]{125.a^4.b^2}}$

3) Usando os valores aproximados de $log\,2 \cong 0{,}30$, $log\,3 \cong 0{,}47$ e $log\,7 \cong 0{,}85$, resolva as seguintes equações:

a) $5^x = 42$

b) $7^x = 15$

c) $10^{2x} = 49$

d) $6^{2x} = 98$

4) (PUC) Assinale a propriedade válida sempre:

a) $log\,(a\,.\,b) = log\,a\,.log\,b$

b) $log\,(a + b) = log\,a + log\,b$

c) $log\,m\,.\,a = m\,.log\,a$

d) $log\,a^m = log\,m\,.\,a$

e) $log\,a^m = m\,.log\,a$

5) (CESGRANRIO) As indicações R_1 e R_2, na escala Ritcher, de dois terremotos estão relacionadas pela fórmula $R_1 - R_2 = log(M_1/M_2)$, onde M_1 e M_2 medem a energia liberada pelos terremotos sob a forma de ondas que se propagam pela crosta terrestre. Houve dois terremotos: um correspondente a $R_1 = 8$ e outro correspondente a $R_2 = 6$.

Então, a razão M_1/M_2 vale:

a) 100

b) 2

c) 4/3

d) 10

e) 1

SAIBA MAIS!


Charles Francis Ritcher

A escala Richter foi desenvolvida por Charles Richter e B. Gutemberg, com intuito de medir a magnitude de terremotos.

Aferida para medir de 0 a 9 graus, a escala logarítmica utiliza a seguinte fórmula:

$$M = log\,A - log\,A'$$

Onde M é a magnitude, A a amplitude máxima e A' a amplitude de referência.

Fonte: (FRANCISCO, 2019)

9.1.3. Mudança de Base

É possível mudar a base de um logaritmo para outra base conveniente. Vamos demonstrar o processo.

Para mudar a base a do logaritmo abaixo para a base c:

$log_a b = x \Rightarrow a^x = b$, logaritmando ambos os membros com base c, temos:

$$log_c a^x = log_c b \Rightarrow x = \frac{log_c b}{log_c a} \Rightarrow \boxed{log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}}.$$

O processo acima mostra que, para mudar de base, basta transformar o logaritmo em equação exponencial e, em seguida, "logaritmar" a equação na base desejada. Ou, se preferir, pode-se utilizar a fórmula demonstrada:

$$\boxed{log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}} \qquad \boxed{\begin{array}{c} a > 0, b > 0, c > 0, \\ a \neq 1 \; e \; c \neq 1 \end{array}}$$

Se o desejo for trocar o logaritmando pela base, usamos:

$$\boxed{log_a b = \frac{1}{log_b a}}$$

Demonstração: Basta fazer $c = b$ na fórmula anterior.

Exemplos:

- $log_2 27$, mudando para a base 3, fica: $log_2 27 = \frac{log_3 27}{log_3 2}$.
- $log_5 7$, vamos inverter o logaritmando pela base: $log_5 7 = \frac{1}{log_7 5}$.

Outros exemplos:

1º exemplo: Usando os valores aproximados de $log\, 2 \cong 0{,}30$, $log\, 3 \cong 0{,}47$ e $log\, 7 \cong 0{,}85$. Calcule:

a) $log_5 21$

Solução: Mudando $log_5 21$ para a base 10 (é a base pela qual temos informações):

$$log_5 21 = \frac{log\, 21}{log\, 5} = \frac{log\, 3.7}{log\frac{10}{2}} = \frac{log\, 3 + log\, 7}{log\, 10 - log\, 2} = \frac{0{,}47 + 0{,}85}{1 - 0{,}3} = \frac{1{,}32}{0{,}7} \cong 1{,}89.$$

b) $log_{14} 15$

Solução: Mudando $log_{14} 15$ para a base 10.

$$log_{14} 15 = \frac{log\, 15}{log\, 14} = \frac{log\, 3.5}{log\, 2.7} = \frac{log\, 3 + log\, 5}{log\, 2 + log\, 7} = \frac{0{,}47 + (log\frac{10}{2})}{0{,}3 + 0{,}85} \Rightarrow$$

$$log_{14} 15 = \frac{0{,}47 + (\overbrace{log\, 10}^{1} - \overbrace{log\, 2}^{0{,}3})}{0{,}7} = \frac{0{,}47 + (0{,}7)}{0{,}7} = \frac{1{,}17}{0{,}7} \cong 1{,}67.$$

2º exemplo: Determine o valor da expressão: $log_{11}125 \,.\, log_5 121$.

Solução: Em expressões como essa é preciso mudar as bases para uma só. Escolhendo a base 11, temos

$$log_{11}125 \,.\, \overbrace{log_5 121}^{mudar\ p/base\ 11} = log_{11}125 \,.\, \frac{log_{11}121}{log_{11}5} = log_{11}5^3 \,.\, \frac{log_{11}11^2}{log_{11}5} \Rightarrow$$

$$3.(log_{11}5).\frac{2\,.\,\overbrace{log_{11}11}^{1}}{log_{11}5} = 3.2 = 6.$$

De outra forma (escolhendo a base 5), dispomos de

$$log_{11}125\,.log_5 121 = \frac{log_5 125}{log_5 11}.log_5 121 =$$

$$\frac{log_5 5^3}{log_5 11}.log_5 11^2 = 3.\frac{\overbrace{log_5 5}^{1}}{log_5 11}.2.(log_5 11) = 3.2 = 6.$$

3º exemplo: Simplifique a expressão: $log_a b.\ log_c a.\ log_d c.\ log_e d$

Solução: Escolhendo a base a para mudança, encontramos

$$log_a b\,.\frac{\overbrace{log_a a}^{1}}{log_a c}.\frac{log_a c}{log_a d}.\frac{log_a d}{log_a e} = \frac{log_a b}{log_a e} = log_e b.$$

EXERCÍCIOS 9.3

1) Usando os valores aproximados de $log\,2 \cong 0{,}30$, $log\,3 \cong 0{,}47$ e $log\,7 \cong 0{,}85$. Calcule:

a) $log_{14}84$ b) $log_{21}5$ c) $log_6 15$

2) Determine o valor da expressão: $log_{49}169\,.log_{13}49$.

3) Se $log_a b = 2$, qual o valor de $log_{\sqrt{3}} a^2$?

4) Se $log_{20}3 = a$ e $log_{20}5 = b$, qual o valor de $log_{15}2$?

5) (UFRGS) Sabendo que $log\,a = L$ e $log\,b = M$, então o logaritmo de a na base b é:

a) $L + M$ b) $L - M$ c) $L\,.M$ d) $\frac{M}{L}$ e) $\frac{L}{M}$

6) (FEI – SP) Considere $a > 1$ e a expressão $x = log_{a^2} a + log_a a^2$. Então, o valor de x é:

a)2 b)3/2 c)5/2 d)2/5 e)1

7) (ITA – SP) Dados $log\,2 = a$ e $log\,3 = b$, então $log_9 20$ é igual a:

a) $\frac{b}{1+2a}$ b) $\frac{a}{1+b}$ c) $\frac{1+a}{2b}$ d) $\frac{b}{2^a}$ e) $\frac{b}{a}$

8) (ENEM) A Escala de Magnitude de Momento (abreviada como MMS e denotada como M_W) introduzida em 1979 por Thomas Haks e Hiroo Kanamori, substitui a escala de Richter para medir a magnitude dos terremotos em termos de energia liberada. Menos conhecida pelo público, a MMS é, no entanto, a escala usada para estimar as magnitudes de todos os grandes terremotos da atualidade. Assim como a escala Richter, a MMS é uma escala logarítmica M_W e M_0 se relacionam pela fórmula: $M_W = -10{,}7 + \frac{2}{3} log\ (M_0)$. Onde M_0 é o momento sísmico (usualmente estimado a partir dos registros de movimento da superfície, através dos sismogramas), cuja unidade é o dina · cm. O terremoto de Kobe, acontecido no dia 17 de janeiro de 1995, foi um dos terremotos que causaram maior impacto no Japão e na comunidade científica internacional. Teve magnitude M_W = 7,3.

U.S. GEOLOGICAL SURVEY. Historic Earthquakes.
Disponível em: http://earthquake.usgs.gov. Acesso em: 1 maio 2010 (adaptado).
U.S. GEOLOGICAL SURVEY. USGS Earthquake Magnitude Policy.
Disponível em: http://earthquake.usgs.gov. Acesso em: 1 maio 2010 (adaptado).

Mostrando que é possível determinar a medida por meio de conhecimentos Matemáticos, qual foi o momento sísmico M_0 do terremoto de Kobe (dina · cm)?

a) $10^{-5,10}$ b) $10^{-0,73}$ c) $10^{12,00}$ d) $10^{21,65}$ e) $10^{27,00}$

9.1.4. Cálculo de logaritmo utilizando calculadora científica

O botão disponível para o cálculo de logaritmos é o "log", que calcula o logaritmo na base 10. Como exemplo, tecle em "log", em seguida digite "100" e tecle em "=". O visor mostrará o resultado 2 (conforme figura 9.1.4.1).

Para logaritmos com base diferente de 10, devemos utilizar a propriedade de mudança de base. Para calcular $log_2 3$, por exemplo, devemos dividir $log\ 3$ pelo $log\ 2$, conforme figura 9.1.4.2.

Para logaritmos naturais (que veremos adiante), tecle no botão "ln" e em seguida digite "10", para o cálculo do $ln\ 10$, por exemplo. Ver figura 9.1.4.3.

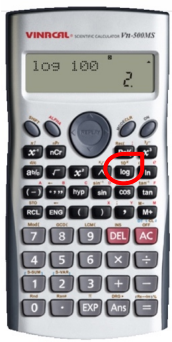


Figura 9.1.4.1



Figura 9.1.4.2

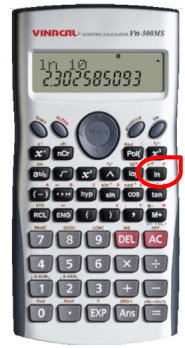


Figura 9.1.4.3

9.2. Equação Logarítmica

Equação logarítmica é toda equação cuja incógnita está no logaritmando, na base ou em ambos. Todas as soluções encontradas neste tipo de equação devem ser testadas na equação original a fim de verificar as condições de existência. Por exemplo, para $log_a b$, devemos verificar se $a > 0$, $a \neq 1$ e $b > 0$. As soluções que não satisfazem essas condições devem ser descartadas.

Exemplo: Resolva as equações.

a) $log_{(x-2)} 25 = 2$

Solução: Aplicando a definição

$$(x-2)^2 = 25 \Rightarrow x - 2 = \pm\sqrt{25} \Rightarrow x - 2 = \pm 5 \Rightarrow$$
$$x = \pm 5 + 2 \Rightarrow \begin{cases} x = +5 + 2 = 7 \\ x = -5 + 2 = -3 \end{cases}.$$

Devemos substituir na equação original para verificar a condição de existência.

Para $x = 7 \Rightarrow log_{(7-2)} 25 = 2 \Rightarrow log_5 25 = 2$ ok!

Para $x = -3 \Rightarrow log_{(-3-2)} 25 = 2 \Rightarrow log_{\underbrace{-5}_{base}} 25 = 2$ descartada! Base negativa.

$S = \{7\}$.

b) $log_3(5.3^x - 6) = 2x$

Solução: Aplicando a definição

$3^{2x} = 5.3^x - 6 \Rightarrow (3^x)^2 - 5.3^x + 6 = 0$ (equação exponencial 2º tipo).

Usando uma incógnita auxiliar $y = 3^x$, temos

$$y^2 - 5y + 6 = 0 \ (a = 1, b = -5 \ e \ c = 6)$$
$$\Delta = b^2 - 4.a.c = (-5)^2 - 4.1.6 = 25 - 24 \Rightarrow \boxed{\Delta = 1}$$
$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2.1} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} y' = \frac{6}{2} = 3 \\ y'' = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}.$$

Para $y = 3 \Rightarrow y = 3^x \Rightarrow 3 = 3^x \Rightarrow \boxed{x = 1}$.

Para $y = 2 \Rightarrow y = 3^x \Rightarrow 2 = 3^x \Rightarrow log_3 2 = log_3 3^x \Rightarrow \boxed{x = log_3 2}$.

Substituindo na equação original para verificar a condição de existência, encontramos:

Para $x = 1 \Rightarrow log_3(5.3^1 - 6) = 2.1$ ok!

Para $x = log_3 2 \Rightarrow log_3(5.3^{log_3 2} - 6) = 2.log_3 2 \Rightarrow log_3(5.2 - 6) = 2.log_3 2.$ ok!

$S = \{1, log_3 2\}$.

c) $log_2(x-2)+log_2(x+3)=4$

Solução: Aplicando a propriedade do produto, temos

$$log_2(x-2).(x+4)=4.$$

Aplicando a definição:

$$(x-2).(x+4)=4^2 \Rightarrow x^2+4x-2x-8=16 \Rightarrow$$

$$x^2+2x-24=0 \Rightarrow \begin{cases} x'=4 \\ x''=-6 \end{cases}.$$

Para $x=4 \Rightarrow log_2(4-2).(4+4)$ ok!

Para $x=-6 \Rightarrow log_2(\overbrace{-6-2}^{negativo})$. Descartada!

Portanto, $S=\{4\}$.

EXERCÍCIOS 9.4

1) Resolva as equações logarítmicas:

a) $log_4(x-3)=1$

b) $log_5(3x+4)=2$

c) $log_2(x^2-4x+4)=2$

d) $log_{\frac{1}{2}}(x^2+x)=-1$

e) $2log_2 x+3log_4 x=7$

f) $log_{x-1}(2x-3)=2$

g) $log_x(x+2)=log_x(-x+6)$

h) $log_7(x^2+8x-9)-log_7(x-1)=1$

2) (UFRGS) A solução da equação $log_2(4-x)=log_2(x+1)+1$ está no intervalo:

a)[-2; -1] b) (-1; 0] c)(0; 1] d) (1; 2] e)(2; 3]

3) (FGV 2003) A equação $log(x+2)+log(x-2)=1$:

a) tem duas raízes opostas.
b) tem uma única raiz irracional.
c) tem uma única raiz menor que 3.
d) tem uma única raiz maior que 7.
e) tem conjunto solução vazio.

4) (UFPA) As populações A e B de duas cidades são determinadas em milhares de habitantes pelas funções: $A(t)=log_4(2+t)^5$ e $B(t)=log_2(2t+4)^2$, nas quais a variável t representa o tempo em anos. Essas cidades terão o mesmo numero de habitantes no ano t, que e igual a

a) 6 b) 8 c) 10 d)12 e)14

5) (UEPB-PB) A Equação $3^{log_3 x^2}-9^{log_9 3x}=0$ admite em $\mathbb{R}$:

b) Uma única raiz menor que 5

c) Duas raízes diferentes
d) Duas raízes positivas
e) Uma única raiz maior que 5
f) Duas raízes maiores que 4

6) Considere a depreciação de um trator agrícola em torno de 20%. Se seu valor de compra foi de R$ 180.000,00, em quantos anos custará a metade? Use $log\,2 \cong 0{,}30$.

7) O crescimento de uma plantação é dado pela função $h(t) = log_{2,8}\,x$, onde $h(t)$ é altura em metros e x é dado em meses.

a) Qual a altura dessa plantação em 2 meses e 24 dias?
b) Em quanto tempo a altura dessa plantação chegará a 2 metros?

8) A produção de grãos de uma determinada região tem como função de ajuste e proximidade, a função $p(t) = log_{30}(900t)$, onde $p(t)$ é produção em milhões de toneladas e t é dado em meses. Use $log\,2 \cong 0{,}30$ e $\log 3 \cong 0{,}5$.

a) Qual a produção no 1º mês?
b) Qual a produção no 2º mês?
c) Em quanto tempo essa produção chegará a 4 milhões de toneladas?

9) Um biólogo ao estudar uma determinada espécie de árvore, modelou seu crescimento com a relação $h(t) = 1 + 2.log_3(t-3)$, onde t representa o tempo em meses e $h(t)$ é altura em metros.

a) Qual o domínio dessa função?
b) É possível calcular o tamanho da árvore para t = 2?
c) Obtenha a altura da árvore em 2 anos e 6 meses.
d) Em quanto tempo terá 9 metros?

10) (ENEM) Um jardineiro cultiva plantas ornamentais e as coloca à venda quando estas atingem 30 centímetros de altura.

Esse jardineiro estudou o crescimento de suas plantas, em função do tempo, e deduziu uma fórmula que calcula a altura em função do tempo, a partir do momento em que a planta brota do solo até o momento em que ela atinge sua altura máxima de 40 centímetros. A fórmula é h = 5·log2 (t + 1), em que t é o tempo contado em dia e h, a altura da planta em centímetro.

A partir do momento em que uma dessas plantas é colocada à venda, em quanto tempo, em dia, ela alcançará sua altura máxima?

a) 63 b) 96 c) 128 d) 192 e) 255

9.3. Função Logarítmica

Definição 9.3.1: A função logarítmica é uma função $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = log_a x$ (ou $y = log_a x$) $\Leftrightarrow a^y = x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$.

9.3.1. Gráfico da função logarítmica

Teorema 9.3.1.1: Seja uma função logarítmica $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ na forma $f(x) = log_a x$ ($\forall a > 0$ e $a \neq 1$), se $a > 1$ a função é **crescente**, se $0 < a < 1$, a função é **decrescente**.

De fato,

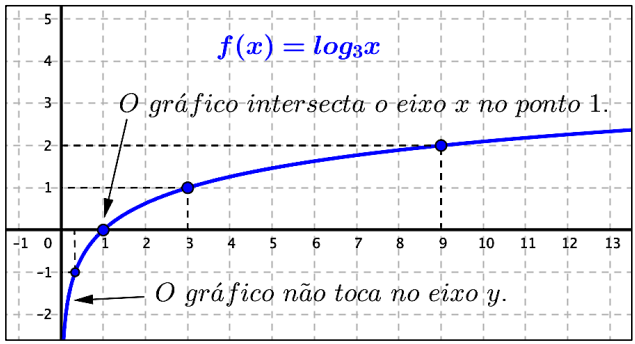
- Se $a > 1$ e $x_1 > x_2 \Leftrightarrow log_a x_1 > log_a x_2$, temos função crescente.
- Se $0 < a < 1$ e $x_1 > x_2 \Leftrightarrow log_a x_1 < log_a x_2$, temos função decrescente.

Outra informação importante é que o gráfico nunca toca o eixo y e sempre intersecta o eixo x no ponto 1 (veja os gráficos a seguir). A demonstração desse fato é similar à demonstração feita para a função exponencial na seção 8.3.

- $f(x) = log_3 x$

x	$log_3 x$	y
$\frac{1}{3}$	$log_3 \frac{1}{3}$	-1
1	$log_3 1$	0
3	$log_3 3$	1
9	$log_3 9$	2

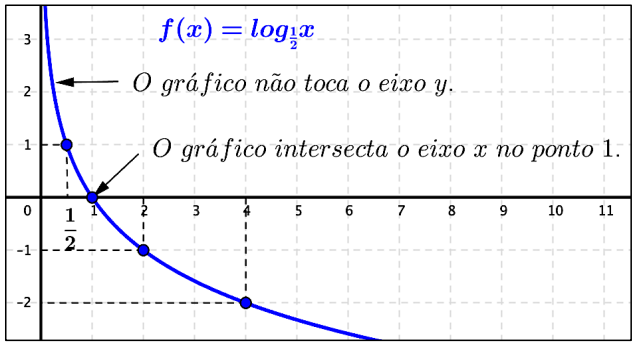
Função crescente ($a > 1$)



- $f(x) = log_{\frac{1}{2}} x$

x	$log_{\frac{1}{2}} x$	y
4	$log_{\frac{1}{2}} 4$	-2
2	$log_{\frac{1}{2}} 2$	-1
1	$log_{\frac{1}{2}} 1$	0
$\frac{1}{2}$	$log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$	1

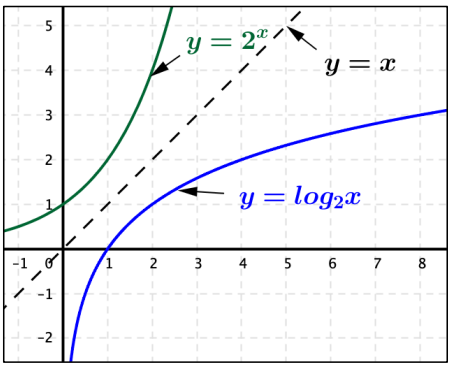
Função decrescente ($0 < a < 1$)



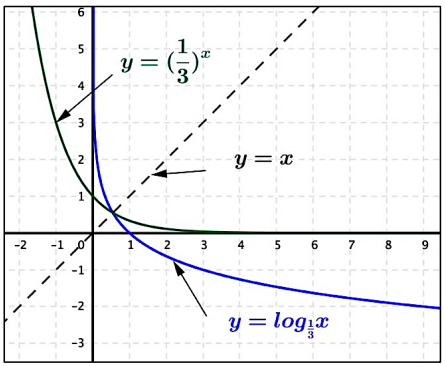
9.3.2. Gráfico da função Logarítmica X função Exponencial

A definição 5.6.1 diz que uma função bijetiva $g: B \to A$ é a inversa de $f: A \to B$, se $f(x) = y$ e $g(y) = x$ e vice-versa. Um exemplo clássico de funções inversas, são as funções: exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida por $y = a^x$ e a, logarítmica $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = log_a x$ (ou $x = a^y$). Essas funções são inversas, uma vez que, ao trocar x por y, a função logarítmica se torna exponencial (e vice-versa). E, consoante ao que ocorre com todas as funções inversas, seus gráficos são simétricos à reta $y = x$ (bissetriz dos quadrantes ímpares). Veja dois exemplos a seguir:

1) $y = 2^x$ e $y = log_2 x$:



2) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ e $y = log_{\frac{1}{3}} x$

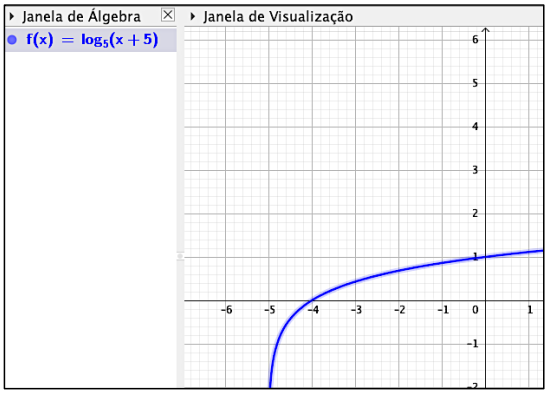


9.4. Gráfico da função logarítmica no geogebra

Como exemplo vamos esboçar no software a função $f(x) = log_5 x + 5$.

Digite no campo de entrada do aplicativo a expressão: "log(5, x+5)" (Observação: a base e o logaritmando são separados por vírgula dentro dos parênteses).

O aplicativo exibirá a função:

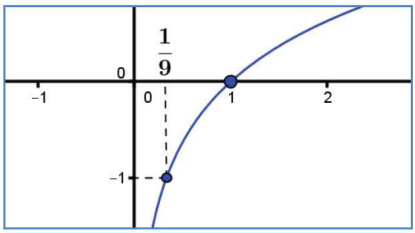


EXERCÍCIOS 9.5

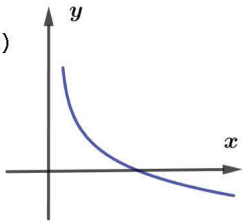
1) Construa o gráfico das seguintes funções logarítmicas e de suas respectivas funções inversas (exponenciais).

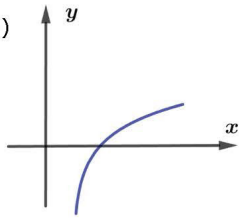
a) $f(x) = log_5 x$ b) $f(x) = log_{\frac{1}{2}} x$ c) $f(x) = log_2(x-3)$

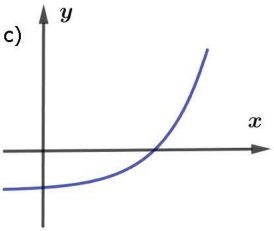
2) Se o gráfico abaixo é da $f(x) = log_n x$, qual o valor de n?

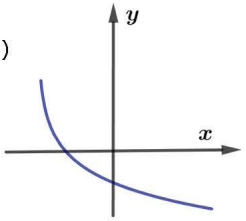


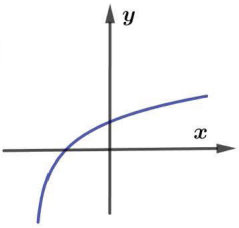
3) (PUC-RS) O gráfico que melhor representa a função f definida por $f(x) = log_4(x-6)$ é

a)


b)


c)


d)


e)


4) (UERJ) No recente acidente que atingiu rios da região norte - noroeste fluminense, o principal contaminante da água foi a soda cáustica (NaOH).

Considere que:

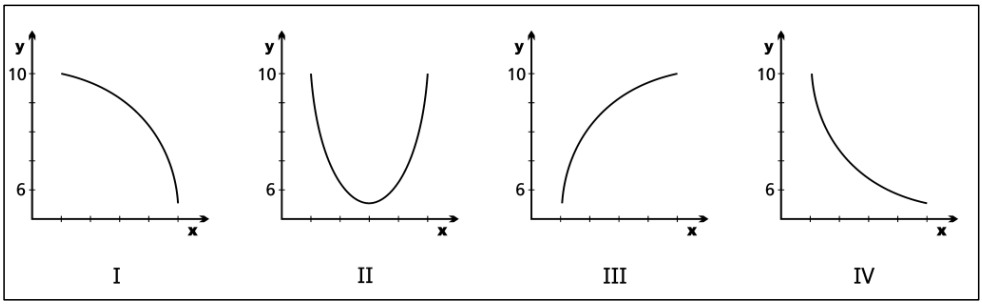
- a mortalidade observada em algumas espécies de peixes desses rios foi diretamente relacionada a alterações do seu equilíbrio ácido-básico;

- o pH do sangue dos peixes pode ser calculado pela fórmula pH = 6,1 + log ([HCOf]/[H,COf]);

- na fórmula citada, [HCOf] refere-se à concentração molar de bicarbonato e [H,COf], à de ácido carbônico.

Observe os gráficos, nos quais y representa medidas do pH de amostras de água e x, medidas de concentração de substâncias encontradas em amostras de sangue de peixes. As amostras de água e os peixes foram coletados, simultaneamente, em diversas áreas dos rios contaminados.

Quando $x = [HCO\mathcal{f}]/[H,CO\mathcal{f}]$, a variação de x em função de y pode ser representada pelo gráfico de número:



a) I b) II c) III d) IV

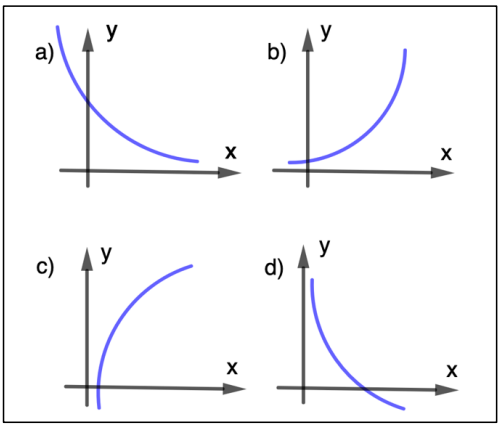
5) (UFV) Considere as seguintes funções reais e os seguintes gráficos:

I- $f(x) = 2^x$

II - $f(x) = log_{(\frac{1}{2})} x$

III - $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

IV - $f(x) = log\, x$



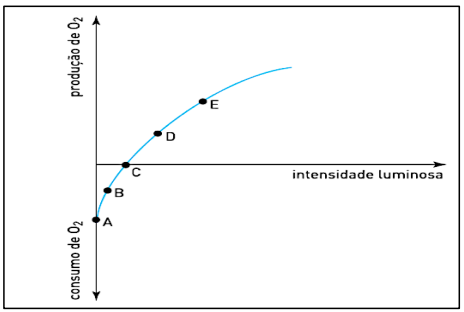
Fazendo a correspondência entre as funções e os gráficos, assinale, dentre as alternativas a seguir, a sequência CORRETA:

a) I-A, II-B, III-C, IV-D
b) I-A, II-D, III-C, IV-B
c) I-B, II-D, III-A, IV-C
d) I-C, II-B, III-A, IV-D
e) I-B, II-C, III-D, IV-A

6) (UERJ) Em uma experiência, mediram-se, em presença do ar atmosférico, o consumo e a produção de oxigênio de uma planta em função da luminosidade a que estava submetida.

A curva do gráfico abaixo indica os resultados da medição:

Identifique os dois pontos da curva que representam condições para o crescimento dessa planta a partir do acúmulo de reservas energética (consumo de O_2).



7) (UNESP) Numa plantação de certa espécie de árvore, as medidas aproximadas da altura e do diâmetro do tronco, desde o instante em que as árvores são plantadas ate completarem 10 anos, são dadas respectivamente pelas funções:

Altura: $H(t) = 1 + 0{,}8 \cdot log_2(t+1)$, diâmetro do tronco: $D(t) = (0{,}1).2^{\frac{t}{7}}$

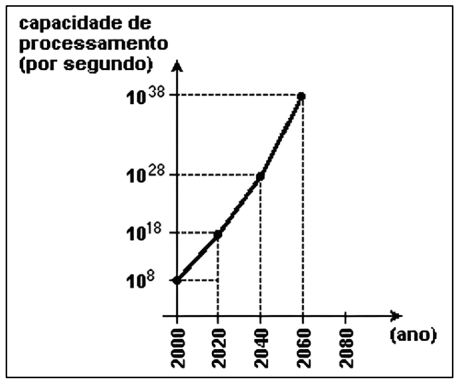
Com $H(t)$ e $D(t)$ em metros e t em anos.

a) Determine as medidas aproximadas da altura, em metros, e do diâmetro do tronco, em centímetros, das arvores no momento em que são plantadas.

b) A altura de uma árvore é 3,4 m. Determine o diâmetro aproximado do tronco dessa arvore, em centímetros.

8) (CESGRANRIO) A velocidade dos computadores cresce de forma exponencial e, por isso, dentro de alguns anos teremos uma evolução aceleradíssima. Para o inventor Ray Kurzweil, um computador de mil dólares tem hoje a mesma inteligência de um inseto. No futuro, ele se igualará à capacidade de um rato, de um homem e, finalmente, de toda a humanidade.

Revista Superinteressante, ago. 2003 (adaptado).



Considerando as informações apresentadas no gráfico acima, que estima a capacidade de processamento (por segundo) de um computador (C) em função do ano (a), de acordo com os dados do texto, pode-se afirmar que:

a) $C = log_{10}(10a + 8)$

b) $C = log_{10}[(a - 1984)/2]$

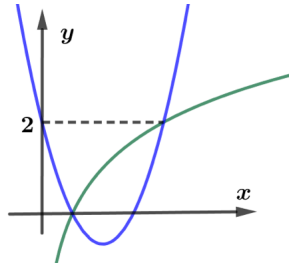
c) $a = 1992 + log_{10} C$

d) $a = [(log_{10} C)/10] - 8$

e) $a = 1984 + log_{10} C^2$

9) (UMP-SP) Se na figura temos os esboços dos gráficos das funções $f(x) = log_2 x$ e $g(x) = ax^2 + bx + c$, então $g(f(\frac{1}{8}))$ é igual a:

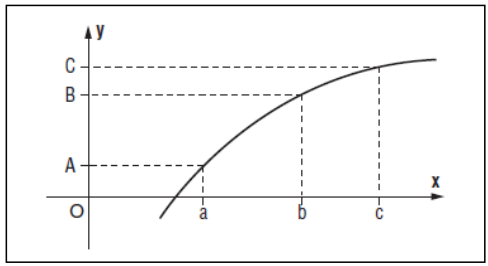
a) 14
b) 15
c) 16
d) 17
e) 18



10) (VUNESP) A figura representa o gráfico de $y = log_{10} x$.

Sabe-se que $\overline{OA} = \overline{BC}$. Então, pode-se afirmar que:

a) $log_a b = c$
b) $a + b = c$
c) $a^c = b$
d) $a.b = c$
e) $10^a + 10^b = 10^c$

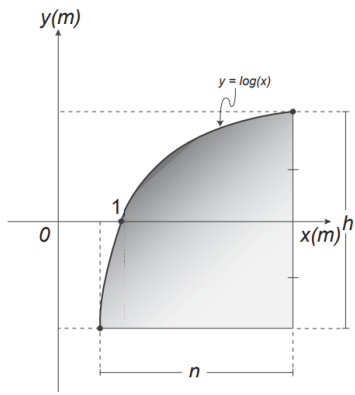


11) (ENEM) Um engenheiro projetou um automóvel cujos vidros das portas dianteiras foram desenhados de forma que suas bordas superiores fossem representadas pela curva de equação $y = log\, x$, conforme a figura a seguir.

A forma do vidro foi concebida de modo que o eixo x sempre divida ao meio a altura h do vidro e a base do vidro seja paralela ao eixo x. Obedecendo a essas condições, o engenheiro determinou uma expressão que fornece a altura h do vidro em função da medida n de sua base, em metros.

A expressão algébrica que determina a altura do vidro é

a) $log\left(\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right) - log\left(\frac{n-\sqrt{n^2+4}}{2}\right)$
b) $log\left(1+\frac{1}{n}\right) - log\left(1-\frac{1}{n}\right)$
c) $log\left(1+\frac{1}{n}\right) + log\left(1-\frac{1}{n}\right)$
d) $log\left(\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right)$
e) $2.log\left(\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right)$



9.5. Logaritmos naturais

Acompanhe o valor da expressão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ para $n \in \mathbb{N}$ (use uma calculadora!).

Para $n = 1 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = (1+1)^1 = 2.$

Para $n = 2 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = (1+0{,}5)^2 = 2{,}25.$

Para $n = 3 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = (1+0{,}333)^3 \cong 2{,}370\ldots$

Para $n = 1000 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} = \left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} = (1+0{,}001)^{1000} \cong 2{,}716924\ldots$

Estudaremos a expressão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ com mais detalhes na unidade sobre limite no volume 4.

Para um valor de n extremamente grande, ou tão grande quanto se deseje, o resultado dessa expressão irá se aproximar de 2,718281828459... Esse número irracional é conhecido como número de Euler, em homenagem ao matemático Leonard Euler (1707-1783), e é representado pela letra e.

$$e = 2{,}718281828459\ldots$$

Se um logaritmo for na base e, escrevemos $ln x$ em vez de $log_e x$ e chamamos de logaritmo natural de x.

Exemplo: $log_e 10$ escreve-se como $ln 10$.

Por consequência da definição, temos que:

- $ln\, e^x = x$
- $e^{lnx} = x$
- $ln 1 = 0$
- $ln(x.y) = lnx + lny$
- $ln(x/y) = lnx - lny$
- $ln\, x^k = k.lnx.$

SAIBA MAIS!

Alguns livros didáticos chamam o logaritmo natural de "logaritmo neperiano", em homenagem ao matemático John Napier (1550-1617). Porém, essa homenagem é inapropriada uma vez que o logaritmo utilizado por ele não é o mesmo logaritmo natural.

Essas propriedades servem para simplificar expressões, como os exemplos a seguir:

a) $ln2 + 3.ln3 - ln6 = ln2 + ln3^3 - ln6 = ln2 + ln27 - ln6 = ln\frac{2.27}{6} = ln9.$

b) $lne^3 + e^{-ln3} = 3.lne + \frac{1}{e^{ln3}} = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}.$

c) $e^{-2lna+lnb} = e^{-2lna}.e^{lnb} = \frac{1}{e^{2lna}}.e^{lnb} = \frac{1}{a^2}.b = \frac{b}{a^2}.$

Além de resolver equações como:

a) $5.e^x = 10^{x+1}$

Solução:

Logaritmando ambos os membros da equação utilizando a base e

$$ln(5.e^x) = ln(10^x.10^1) \Rightarrow ln5 + ln\, e^x = ln10^x + ln\, 10 \Rightarrow$$

$$ln5 + x = x.ln\, 10 + ln\, 10 \Rightarrow x - x.ln\, 10 = ln\, 10 - ln5 \Rightarrow$$

$$x.(1 - ln\, 10) = ln\, \frac{10}{5} \Rightarrow x.(1 - ln\, 10) = ln2 \Rightarrow \boxed{x = \frac{ln2}{1 - ln\, 10}}.$$

Como $ln2 \cong 0{,}7$ e $ln10 \cong 2{,}30$, temos: $x = \frac{0{,}7}{1-2{,}30} = \frac{0{,}7}{-1{,}30} \Rightarrow \boxed{x \cong -0{,}5385}$.

b) $16 = 5.(2 + e^{6-0{,}4x})$

Solução:

Logaritmando ambos os membros da equação.

$$\frac{16}{5} = (2 + e^{6-0{,}4x}) \Rightarrow \frac{16}{5} - 2 = e^{6-0{,}4x} \Rightarrow \frac{6}{5} = e^{6-0{,}4x} \Rightarrow$$

$$ln\left(\frac{6}{5}\right) = ln(e^{6-0{,}4x}) \Rightarrow ln\left(\frac{6}{5}\right) = 6 - 0{,}4x \Rightarrow \boxed{x = \frac{-ln\left(\frac{6}{5}\right) + 6}{0{,}4}}.$$

Como $ln\left(\frac{6}{5}\right) \cong 0{,}1823$, temos: $x = \frac{-0{,}1823+6}{0{,}4} = \frac{5{,}8177}{0{,}4} \Rightarrow \boxed{x \cong 14{,}55}$.

Inclusive, na modelagem matemática que envolve fenômenos naturais, comumente utilizamos a base e para as funções exponenciais e logarítmicas.

Exemplo: A Lei de Beer descreve a atenuação da radiação atravessando meios distintos, inclusive dosséis vegetais, que é necessária para estimar a produtividade potencial. Uma equação de Beer adequada à um dossel vegetal, pode ser dada pela equação:

$$I = I_0.e^{-k(IAF)}$$

Em que, I - radiação incidente (Wm^{-2}), I_0 - radiação incidente antes de atravessar a camada (Wm^{-2}) e IAF - índice de área foliar (m^2m^{-2}).

Fonte: (SOUZA, CARNEVSKIS, *et al.*, 2016)

Expresse o IAF - índice de área foliar em função de I - radiação incidente.

Solução:

$$I = I_0.e^{-k(IAF)} \Rightarrow \frac{I}{I_0} = e^{-k(IAF)} \Rightarrow ln\,(\frac{I}{I_0}) = ln\,(e^{-k(IAF)}) \Rightarrow$$

$$ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = -k(IAF) \Rightarrow \boxed{IAF = \frac{-ln\left(\frac{I}{I_0}\right)}{k}}.$$

2º exemplo: (UNICAMP) A função $L(x) = ae^{bx}$ fornece o nível de iluminação, em luxes, de um objeto situado a x metros de uma lâmpada.

a) Calcule os valores numéricos das constantes a e b, sabendo que um objeto a 1 metro de distância da lâmpada recebe 60 luxes e que um objeto a 2 metros de distância recebe 30 luxes.

Solução: Substituindo as informações na função $L(x) = ae^{bx}$, temos

$$60 = ae^{b.1} \Rightarrow \boxed{60 = ae^{b}} \ (1).$$

$$30 = ae^{b.2} \Rightarrow \boxed{30 = ae^{2b}} \ (2).$$

Dividindo (1) por (2)

$$\frac{ae^{b}}{ae^{2b}} = \frac{60}{30} \Rightarrow e^{b-2b} \Rightarrow 2 \Rightarrow e^{-b} = 2 \Rightarrow$$

$$log_e e^{-b} = log_e 2 \Rightarrow -b = ln2 \Rightarrow \boxed{b = -ln2}.$$

Substituindo b em (1)

$$60 = ae^{-ln2} \Rightarrow 60 = ae^{ln2^{-1}} \Rightarrow 60 = ae^{log_e 2^{-1}} \Rightarrow$$

$$60 = a.2^{-1} \Rightarrow 60 = \frac{a}{2} \Rightarrow \boxed{a = 120}.$$

Substituindo na função

$$L(x) = ae^{bx} = 120.e^{(-ln2).x} = 120.\left(e^{ln2}\right)^{-x} \Rightarrow \boxed{L(x) = 120.2^{-x}}.$$

b)Considerando que um objeto recebe 15 luxes, calcule a distância entre a lâmpada e esse objeto.

Solução: Substituindo as informações na função encontrada, dispomos de

$$L(x) = 120.2^{-x} \Rightarrow 15 = 120.2^{-x} \Rightarrow \frac{15}{120} = 2^{-x} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{8} = 2^{-x} \Rightarrow 2^{-3} = 2^{-x} \Rightarrow \boxed{x = 3m}.$$

Já sabemos a caracterização da função afim, quadrática e exponencial. Agora, como saber se a função de ajuste de um determinado conjunto de dados é uma função logarítmica? O teorema a seguir nos ajuda nesse ponto.

Teorema 9.5.1 (Caracterização das funções logarítmicas): Seja uma função $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ contínua que transforma toda progressão geométrica $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ de razão q numa progressão aritmética $(f(x_1), f(x_2), f(x_3) \ldots)$ de razão r, essa função será da forma $f(x) = b.lnx$ se $lnq = r/b$.

Esse teorema é a aplicação inversa, nos mesmos moldes, do teorema 8.5.1 já demonstrado, que afirma que uma função exponencial transforma progressão aritmética em geométrica. Desse modo, como as funções exponenciais e logarítmicas são bijetivas e inversas, a demonstração do teorema é dispensável.

Da forma em que se apresenta, esse teorema pode não ser útil, principalmente no contexto que envolve tabelas de experimentos, pois os valores das abcissas estão quase sempre em P.A e não em P.G (ou em nenhum dos casos). Para esse empecilho, aplicaremos um processo denominado de **linearização**, que vem logo a seguir.

9.6. Linearização de funções exponenciais e logarítmicas

Definição 9.6.1: Seja uma função exponencial na forma $y = f_0.e^{bx}$ (com $f_0 > 0$), denominamos de linearização da função exponencial, o processo de logaritmar ambos os membros da função em uma base pretendida.

Veja um exemplo para a "logaritimização" na mesma base e da função exponencial:

$$y = f_0.e^{bx} \Rightarrow lny = lnf_0.e^{bx} = ln\,f_0 + ln\,e^{bx} = ln\,f_0 + bx \Rightarrow \boxed{lny = ln\,f_0 + bx}\,(*).$$

A função na forma $y = f_0.e^{bx}$ é exponencial na escala y e a função $lny = ln\,f_0 + bx$ é uma função afim na escala lny.

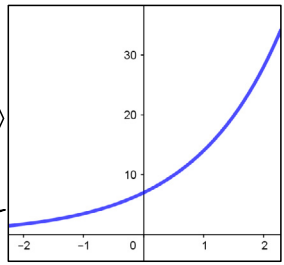
Para o processo de linearização, pode-se escolher qualquer base para o logaritmo, inclusive uma base diferente da base da função exponencial.

Exemplo: $y = 7.2^x$

$$y = 7.2^x \Rightarrow log\,y = \overbrace{log\,7}^{0,845098} + x.\overbrace{log\,2}^{0,30103} \Rightarrow \boxed{log\,y = 0{,}30103x + 0{,}845098}$$

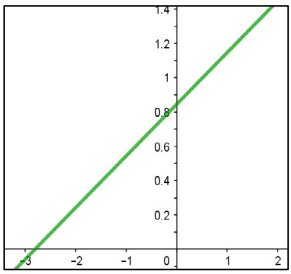
x	y
-2	1,75
-1	3,5
0	7
1	14
2	28

Gráfico exponencial



x	$logy$
-2	0,243038
-1	0,544068
0	0,845098
1	1,146128
2	1,447158

Gráfico linearizado



O processo de linearização nos fornece uma alternativa para calcular uma função exponencial que se ajusta aos dados, mesmo que os valores de x não estejam em P.A, uma vez que a função linearizada é uma função afim.

Esse processo consiste em logaritmar todos os valores da coluna de y e calcular a partir desses valores a taxa de variação. Se ela for constante, trata-se de uma função exponencial; caso contrário, não.

Ao linearizar a função exponencial na forma $y = f_0.e^{bx}$, a taxa de variação será o coeficiente b da função original, conforme (*). Uma vez calculado o coeficiente b, basta substituir um ponto qualquer na função, para encontrar f_0.

Exemplo: Um trabalho de modelagem matemática aplicada às curvas de secagem de grãos de feijão-caupi (Vigna unguiculata (L.) Walp.) para as temperaturas 25, 35, 45 e 55ºC, apresentou os seguintes resultados para a curva de 25ºc (tempo x razão de umidade):

Tempo (h)	Razão de umidade
0,1	0,244281
0,2	0,298365
0,3	0,364424
0,4	0,445108

Fonte adaptada: (MORAIS, DEVILLA, *et al.*, 2013)

a)Calcule a função exponencial de ajuste (de base e) para os dados.

Solução:

1º passo: Logaritmar os valores de y na base e (escolhida) e em seguida calcular a 1ª taxa de variação.

Tempo	lny	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
0,1	-1,4094361	-
0,2	-1,2094377	$\frac{-1,2094377+1,4094361}{0,2-0,1}=2$
0,3	-1,0094373	$\frac{-1,0094373+1,2094377}{0,3-0,1}=2$
0,4	-0,8094383	$\frac{-0,8094383+1,0094373}{0,4-0,3}=2$

Para cálculo de logaritmos na calculadora científica veja a subseção 9.1.4.

2º passo: Calcular o coeficiente b que é a própria taxa de variação.

$$b=\frac{\Delta y}{\Delta x}\Rightarrow \boxed{b=2}.$$

3º passo: Substituir um ponto qualquer na função $y=f_0.e^{bx}$ para encontrar f_0.

Substituindo o primeiro ponto, temos

$$0,244281=f_0.e^{2.0,1}\Rightarrow 0,244281=f_0.1,221403\Rightarrow f_0=\frac{0,244281}{1,221403}\Rightarrow \boxed{f_0=0,2}.$$

A função é $\boxed{f(x)=0,2.e^{2x}}$.

Outra solução: Como os valores de x estão em P.A podemos aplicar o método visto em função exponencial (teorema 8.5.1- transforma P.A em P.G), mas com um detalhe: como queremos a base e, e a base nesse método é calculada por $\sqrt[r]{q}$, devemos fazer em seguida $e^a=\sqrt[r]{q}$.

Calculando a razão da P.G

$$q=\frac{0,298365}{0,244281}=1,221403;\frac{0,364424}{0,298365}=1,22403\ e\frac{0,445108}{0,364424}=1,22403.$$

Como a razão da P.A é $r=0,1$, temos

$$e^a=\sqrt[r]{q}\Rightarrow e^a=\sqrt[0,1]{1,221403}\Rightarrow e^a=\sqrt[0,1]{1,221403}\Rightarrow$$

$$e^a = 7{,}389056 \Rightarrow ln(e^a) = l\,n(7{,}38) \Rightarrow \boxed{a = 2}.$$

Usando o 1º ponto para encontrar o coeficiente a

$$f(x) = f_0 e^{ax} \Rightarrow 0{,}244281 = f_0 e^{2.0{,}1} \Rightarrow 0{,}244281 = f_0 e^{0{,}2} \Rightarrow$$

$$0{,}244281 = f_0 . 1{,}221403 \Rightarrow f_0 = \frac{0{,}244281}{1{,}221403} \Rightarrow \boxed{f_0 = 0{,}2} \Rightarrow \boxed{f(x) = 0{,}2.e^{2x}}.$$

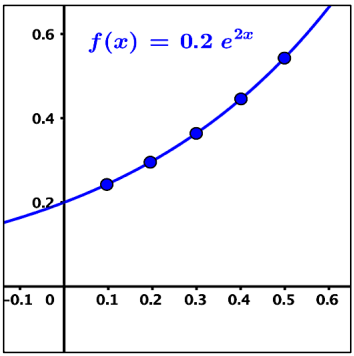
Está claro que o método da linearização é mais prático, e além disso, se aplica quando os valores de x não estão em P.A.

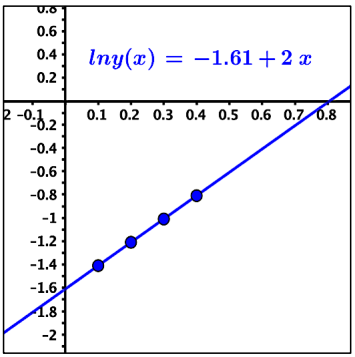
b)Linearize a função encontrada e esboce os dois gráficos: exponencial e afim.

Solução:

$$y = 0{,}2.e^{2x} \Rightarrow lny = ln(0{,}2.e^{2x}) \Rightarrow$$

$$lny = ln(0{,}2) + ln(e^{2x}) \Rightarrow \boxed{lny = -1{,}60944 + 2x}.$$





O processo de linearização das funções logarítmicas é similar a função exponencial. Como a função logarítmica $x \rightarrow y$ é a inversa da função exponencial $x \leftarrow y$, devemos então, "logaritmar" todos os valores da coluna de x e calcular a partir desses valores a taxa de variação. Se ela for constante, trata-se de uma função logarítmica; caso contrário, não.

Como normalmente utiliza-se funções logarítmicas na forma $f(x) = a + b.lnx$, a taxa de variação da função, neste caso, será o próprio coeficiente b da função. Veja:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{a + b.lnx_2 - (a + b.lnx_1)}{lnx_2 - lnx_1} = \frac{b.(lnx_2 - lnx_1)}{lnx_2 - lnx_1} = b.$$

Uma vez encontrado o coeficiente b, basta substituir um ponto qualquer na função para encontrar o coeficiente a.

Exemplo: Na tabela a seguir estão as informações entre duas grandezas analisadas. Calcule uma função logarítmica que se ajusta aos dados.

x	y
3	29,93
7	72,3
9	84,86
13	103,25
20	124,78

Solução: Logaritmando as abscissas e calculando a taxa de variação

lnx	y	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
1,09861229	29,93	---
1,94591015	72,3	$\frac{72,3-29,93}{1,94591015-1,09861229}=50$
2,19722458	84,86	$\frac{84,86-72,3}{2,19722458-1,94591015}=50$
2,56494936	103,25	$\frac{103,25-84,86}{2,56494936-2,19722458}=50$
2,99573227	124,78	$\frac{124,78-103,25}{2,99573227-256494936}=50$

Use calculadora científica! Para cálculo de logaritmos naturais veja a subseção 9.7.1.

Como a taxa de variação é constante, a função que se ajusta aos dados é uma função logarítmica. Usando a forma $f(x) = a + b.lnx$, temos que $\boxed{b = 50}$.

Substituindo no primeiro ponto (3 ; 29,93), temos

$$29{,}93 = a + \underbrace{50.\overbrace{ln3}^{1{,}9861}}_{2} \Rightarrow 29{,}93 = a + 54{,}93 \Rightarrow \boxed{a = -25}.$$

Logo, a função é $\boxed{f(x) = -25 + 50.lnx}$. Faça os testes!

EXERCÍCIOS 9.6

1) Simplifique as expressões:

a) $e^{-\log e}$

b) $(e^{ln2})^{log_2 e}$

c) $3.ln2 + 2.ln3 - ln18$

d) $-lne^5 + e^{-ln5} - e^{\log_e 5}$

e) $e^{-5lna+7lnb}.e^{7lna-5lnb}$

f) $5.lne - e^{ln2} - lne^3$

2) Resolva as equações:

a) $log_e x = e^{ln3}$

b) $e^{ln1} = log_{e^x} e$

c) $6.e^x = 5^{x-1}$

d) $5.ln2 = ln(30 + e^{1-x})$

e) $\sqrt{e^{ln1+ln2+ln4+ln8}} = (8 - e + e^{1-2x})$

f) $e^x + 6.e^{-x} = 5$

3) Linearize as funções exponenciais a seguir, utilizando a base 10 no logaritmo.

a) $f(x) = 5^x$ b) $f(x) = 4.(0{,}5)^x$ c) $f(x) = 10.(\frac{1}{3})^x$

4) (UERJ) Segundo a lei do resfriamento de Newton, a temperatura T de um corpo colocado num ambiente cuja temperatura é T_0 obedece à seguinte relação: $T = T_0 + k.e^{-ct}$. Nesta relação, T é medida na escala Celsius, t é o tempo medido em horas, a partir do instante em que o corpo foi colocado no ambiente, e k e c são constantes a serem determinadas.

Considere uma xícara contendo café, inicialmente a 100°C, colocada numa sala de temperatura 20°C. Vinte minutos depois, a temperatura do café passa a ser de 40ºC.

a) Calcule a temperatura do café 50 minutos após a xícara ter sido colocada na sala.

b) Considerando $ln\ 2 = 0{,}7$ e $ln\ 3 = 1{,}1$, estabeleça o tempo aproximado em que, depois de a xícara ter sido colocada na sala, a temperatura do café se reduziu à metade.

5) Considere que a população de bactérias de uma cultura seja dada pela função $P(x) = P_0.e^{0{,}5x}$. Onde x é a geração, P_0 população inicial e $e = 2{,}7182$. Calcule a geração pela qual a população dobra de valor.

6) A proliferação de uma praga em uma plantação cresce exponencialmente de acordo com os dias (t) e segundo a função $Q(t) = Q_0 e^{at}$. Se inicialmente estavam infectadas 20 plantas e no 8º dia, 60 plantas:

a) Qual o valor do coeficiente a?

b) Quantas plantas estarão infectas no 24º dia?

c) Construa gráfico Q x t.

7) A dinâmica do crescimento vegetal pode ser acompanhada por meio de fórmulas matemáticas. As células individuais ou órgãos apresentam potencialmente um crescimento ilimitado que obedece a um padrão exponencial. Interações mútuas entre indivíduos impõem limitações ao crescimento e a curva de crescimento sofre uma inflexão, tomando uma conformação sigmoide (Ver figura).

Supondo que o crescimento do peso de matéria seca nestas condições segue a seguinte equação: $W(t) = \frac{6}{1+e^{-5t+5}}$.

a) Qual o seu crescimento do peso de matéria seca em um intervalo de tempo igual a 1?

b) Qual o tempo para um crescimento do peso de matéria igual a 5?

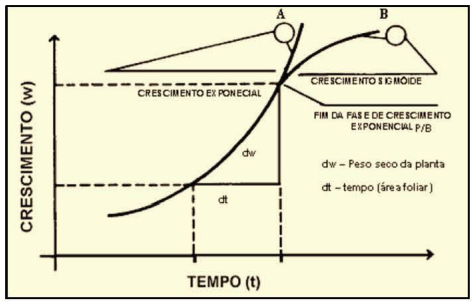


Imagem da fonte

Fonte adaptada: (PEIXOTO, ALMEIDA, *et al.*, 2020)

8) Considere que relação entre clorose variegada dos citros (CVC) (em porcentagem) causada pela bactéria Xylella fastidiosa que afeta laranjeiras e a produção P (em kg de frutos assintomáticos/planta) pode descrita pela equação $P(x) = 114.e^{-0,018x}$, calcule:

a) O valor de da produção para uma incidência de CVC de 60%.

b) A incidência de CVC para uma produção de 100 kg/planta.

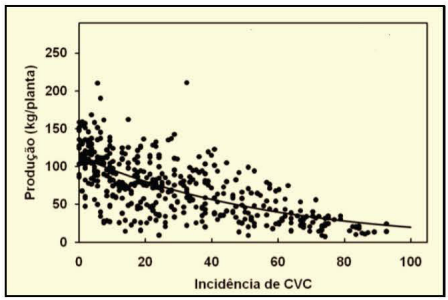


Imagem da fonte

Fonte adaptada: (GONCALVES, 2010)

9) Levedura, um fungo microscópico usado para fazer pão e bebidas alcoólicas, pode produzir uma clássica curva em formato de S quando cresce em um tubo de ensaio. No gráfico abaixo, o crescimento da levedura estabiliza quando a população atinge o limite dos nutrientes disponíveis.

Considerando a função de ajuste como sendo $Q(t) = -2 + \frac{16}{1+e^{-2t+20}}$, onde $Q(t)$ é a quantidade de levedura e t é dados em horas, calcule:

a)A quantidade de levedura para $t = 10$ horas;

b)O tempo necessário para uma quantidade de levedura igual 10.

c)Qual a quantidade de levedura máxima limite (estabilizada)?

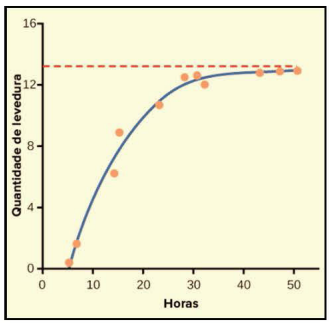


Imagem da fonte

Fonte adaptada: (KHAN ACADEMY)

10) Um trabalho desenvolvido em Dourados, estado do Mato Grosso do Sul, avaliou as características de infiltração de água no solo em três diferentes sistemas de cultivo: pastagem (Sistema A); aveia cultivada sob o sistema de plantio direto (Sistema B); e pastagem contínua (Sistema C), para duas intensidades de precipitação (Ip): 60 mm h^{-1}e 100 mm h^{-1}. Os dados de campo de volume de água infiltrado no tempo, ajustaram-se aos modelos de Kostiakov-Lewis e de Horton, sendo esse último na forma $Ip(t) = 25 + 69.e^{-0,12t}$.

a) Qual o valor de $Ip(0)$?

b) Qual o tempo para $Ip(t) = 40$?

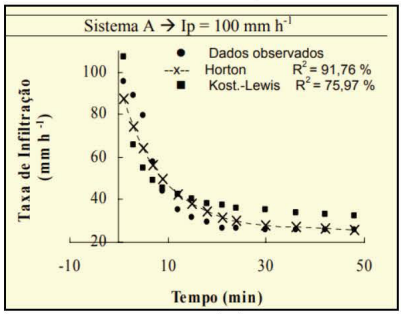


Imagem da fonte

Fonte adaptada: (PANACHUKI, SOBRINHO, *et al.*, 2006)

11) Os dados a seguir foram coletados a partir do crescimento do diâmetro de uma árvore com o decorrer dos anos:

t (em anos)	Diâmetro (cm)
5	10,4996
10	10,9967
15	11,4889

Sabendo que a função de ajuste é forma $D(t) = \frac{20}{1+e^{-kt}}$:

a)Calcule o valor da constante k.

b)Calcule o diâmetro dessa árvore em 50 anos.

c)Qual o valor máximo desse diâmetro?

12) Os dados sobre a infiltração de água (I) de um determinado solo de acordo com o tempo (t) estão dispostos na tabela seguir:

t (min)	I (cm)
5	0,6163
10	0,7914
15	1,0162
20	1,3048
25	1,6754

a)Calcule a função exponencial de ajuste (de base e) para os dados;

b)Qual a medida de infiltração em 2 horas?

c)Esboce o gráfico exponencial.

d)Linearize a função exponencial usando a base e.

13) Os dados sobre a condutividade hidráulica (min^{-1}) não saturada do solo Argiloso em função do conteúdo volumétrico de água (cm³) estão disposto a seguir:

Conteúdo volumétrico	Condutividade hidráulica
0,15	0,023456
0,20	0,368675
0,25	0,636447
0,30	0,855233
0,35	1,040213

Fonte adaptada: (FILHO, HELDWEIN, *et al.*, 2013)

a)Calcule a função logarítmica de ajuste (de base e) para os dados.

b)Esboce o gráfico.

14) A seguir está a relação entre duas grandezas analisadas em um experimento. Calcule uma função logarítmica que se ajusta aos dados.

x	y
0,1	17,76381
0,2	27,46787
0,3	33,14438
0,4	37,17193
0,5	40,29594

9.7. Regressão exponencial e logarítmica

Já sabemos que após a linearização de uma função exponencial e uma função logarítmica, a taxa de variação é constante. Porém, em determinadas situações podemos não ter taxa de variação constante, mas valores que se aproximem da igualdade. Nesses casos, a função que melhor se aproxima aos dados, possivelmente será uma função desse tipo.

Para encontrar tal função, inicialmente, devemos linearizá-la e, em seguida, aplicar a regressão linear (já vista na função afim) utilizando o método dos mínimos quadrados.

9.7.1. Regressão exponencial

A função exponencial na forma $y = f_0.e^{bx}$ (com $f_0 > 0$), possui linearização na forma: $lny = ln\, f_0 + bx$. Assim, a reta de regressão $y' = mx + n$, será dada por: $y' = lny$, $m = b$ e $n = l\,n\,a$.

Exemplo: Vamos encontrar uma função que melhor se aproxima das informações da tabela abaixo

x	2	4	6	8	10
y	21	81	300	1250	5000

Solução: Inicialmente, com o auxílio de uma calculadora científica, vamos calcular $y' = lny$ e a taxa de variação.

x	y	y'	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
2	21	3,044522	
4	81	4,394449	$\frac{4{,}394449 - 3{,}044522}{4-2} = 0{,}6749635$
6	300	5,703782	$\frac{5{,}703782 - 4{,}394449}{6-4} = 0{,}6546665$
8	1250	7,130889	$\frac{7{,}130889 - 5{,}703782}{8-6} = 0{,}7135535$
10	5000	8,517193	$\frac{8{,}517193 - 7{,}130889}{10-8} = 0{,}693152$

Como a taxa de variação se aproxima da igualdade, temos que a função que melhor se aproxima aos dados, possivelmente, é uma função exponencial.

Para cálculo da regressão linear, vamos acrescentar duas colunas com valores de xy' e x^2, na tabela:

x	y	y'	xy'	x^2
2	21	3,044522	6,089045	4
4	81	4,394449	17,5778	16
6	300	5,703782	34,22269	36
8	1250	7,130889	57,04719	64
10	5000	8,517193	85,17193	100
$\bar{x} = 6$		$\overline{y'} = 5{,}758169$	$\overline{xy'} = 40{,}02173$	$\overline{x^2} = 44$

Médias aritméticas

$$m = \frac{\overline{x_i y_i{}'} - \overline{x_i}\,.\,\overline{y_i{}'}}{\overline{x_i{}^2} - (\overline{x_i})^2} = \frac{40{,}02173 - 6\,.5{,}758169}{44 - (6)^2} = \frac{5{,}472716}{8} \Rightarrow \boxed{m = 0{,}6841}$$

$$n = \overline{y_i{}'} - m.\overline{x_i} \;\Rightarrow\; n = 5{,}758169 - 0{,}68409\,.\,6 \Rightarrow \boxed{n = 1{,}653632}$$

$$y' = mx + n \Rightarrow \boxed{y' = 0{,}6841x + 1{,}653632}.$$

Como $n = ln\, a$, temos

$$1{,}653632 = ln\, a \;\Rightarrow\; a = e^{1{,}653632} \;\Rightarrow\; \boxed{a = 5{,}225925}.$$

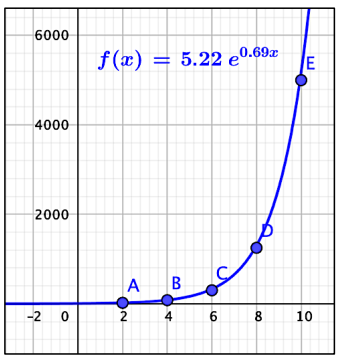
A função exponencial é $\boxed{y = 5{,}225925.\, e^{0{,}6841x}}$.

Vamos calcular o coeficiente de determinação:

x	y	$\hat{y} = 5{,}225925.\, e^{0{,}6841x}$	$(y - \hat{y})^2$ (resíduos)	$(y - \overline{y})^2$ (diferença p / média)
2	21	20,528	0,222784	1714528
4	81	80,6426	0,127735	1561000
6	300	316,7862	281,7765	1061724
8	1250	1244,423	31,10293	6464,16
10	5000	4888,433	12447,2	13465964
	$\overline{y}$ =1330,4		SQ_{RES} =12760,43	SQ_{DM} =17809681

$$R^2 = 1 - \frac{SQ_{RES}}{SQ_{DM}} \Rightarrow R^2 = 1 - \frac{12760{,}43}{17809681} = 0{,}9992 \Rightarrow 99{,}92\%$$

Veja na imagem do software geogebra a seguir a disposição dos pontos no plano cartesiano e a função encontrada. Observe o quão próxima a função está dos pontos.



9.7.2. Regressão logarítmica

De forma similar à regressão exponencial, utilizamos também a linearização da função logarítmica e, em seguida, a aplicação da regressão linear utilizando o método dos mínimos quadrados.

Sendo a função logarítmica na forma $f(x) = a + b.lnx$, a reta de regressão $y' = mx + n$, será dada por: $m =$ b e $n = a$.

Exemplo: Vamos encontrar uma função que melhor se aproxima das informações da tabela a seguir.

x	y
1	5,01
3	7,05
5	8,01
7	8,64
9	9,12

Solução: Logaritmando as abscissas e calculando a taxa de variação.

lnx	y	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
0	5,01	---
1,098612	7,05	$\frac{7,05-5,01}{1,098612-0} = 1,856889$
1,609438	8,01	$\frac{8,01-7,05}{1,609438-1,098612} = 1,879309$
1,94591	8,64	$\frac{8,64-8,01}{1,94591-1,609438} = 1,87237$
2,197225	9,12	$\frac{9,12-8,64}{2,197225-1,94591} = 1,909954$

É perceptível que a taxa de variação é próxima da igualdade, portanto vamos encontrar uma função logarítmica na forma $f(x) = a + b.lnx$.

x	y	$x.y$	x^2
0	5,01	0	0
1,098612	7,05	7,745217	1,206949
1,609438	8,01	12,8916	2,59029
1,94591	8,64	16,81266	3,786566
2,197225	9,12	20,03869	4,827796
$\bar{x} = 1,370237$	$\bar{y} = 7,566$	$\overline{xy} = 11,49763$	$\overline{x^2} = 2,48232$

Médias aritméticas

$$m = \frac{\overline{x_i y_i} - \overline{x_i}.\overline{y_i}}{\overline{x_i}^2 - (\overline{x_i})^2} = \frac{11,49763 - 1,370237.7,566}{2,48232 - (1,370237)^2} = \frac{1,130417}{0,604771} \Rightarrow \boxed{m = 1,8692}$$

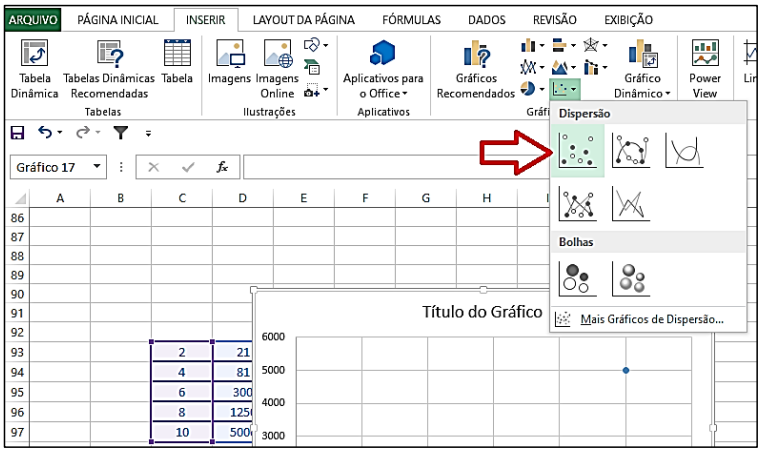
$$n = \overline{y_i}' - m.\overline{x_i} \Rightarrow n = 7,566 - 1,8692\ .1,370237 \Rightarrow \boxed{n = 5,0048}$$

A função é $\boxed{f(x) = 5,0048 + 1,8692.lnx}$.

Calcule o coeficiente de determinação e visualize a função e os pontos no geogebra.

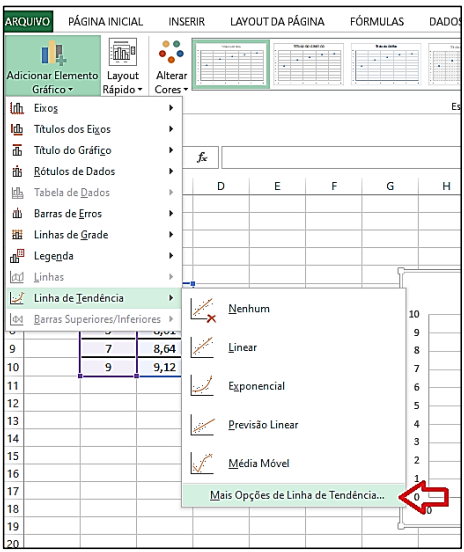
9.7.3. Regressão exponencial e logarítmica utilizando planilha eletrônica

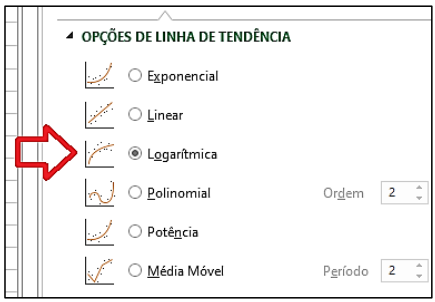
No Microsoft Excel, digite os dados da tabela em duas colunas numa planilha em branco. Selecione as duas colunas. Em seguida vá no menu aba inserir, clique em gráficos e, em seguida, primeira opção de dispersão:



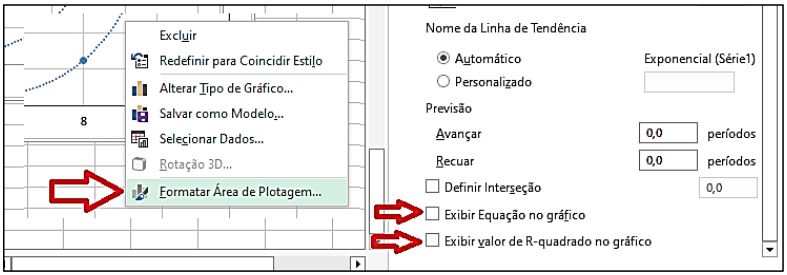
Na primeira opção da aba "DESIGN" clique na opção: "Adicionar elemento gráfico" no canto superior esquerdo (primeira opção).

Em seguida, selecione a opção "Exponencial" para função exponencial ou "mais opções de linha de tendência" e depois a opção "logarítmica" para função logarítmica.





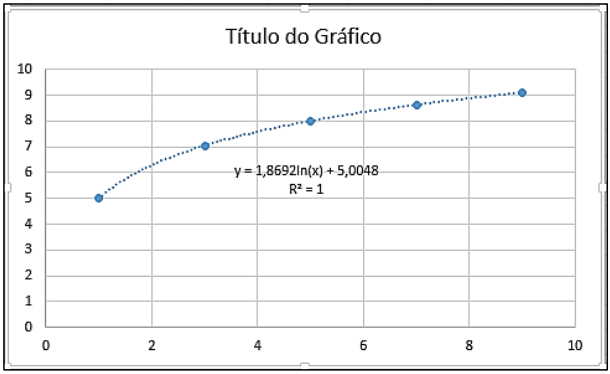
Clique com o botão direito do mouse sobre a linha do gráfico e selecione a opção "formatação Área de Plotagem". Novas opções irão aparecer no lado direito. Desça usando a barra de rolagem até a opção "exibir Equação no gráfico" e "Exibir valor de R – quadrado no gráfico. Marque-as.



O Excel irá exibir o gráfico, a função e o coeficiente determinação.
Exponencial:



Logarítmica:



9.7.4. Regressão exponencial e logarítmica usando calculadora científica

Como demonstração iremos utilizar a calculadora VINACAL VN-500MS (ou CASIO FX-82MS - detalhes no prefácio) e utilizar as informações dos exemplos anteriores.

Para regressão exponencial: Inicialmente, zere a memória e as configurações da calculadora, tecle:



SHIFT, MODECLR, 3, =

2º - Tecle:  (MODECLR, 3 - corresponde a regressão).

A tela da calculadora mostrará as opções que estão na figura 9.7.4.1;

3º - Tecle:  (que corresponde a exponencial);

4º - Digite os pontos (os pares) separados por vírgula e tecle em  .

A cada M+ o valor de n = 1, 2, 3 aparecerá na tela. Continue o processo até o último ponto.

5º - Tecle:  (SHIFT, 2 - refere-se variância);

6º - Tecle a seta para a direita da calculadora duas vezes, conforme indica a "mão" na figura 9.7.4.2;

7º - Na tela da figura 9.7.4.3, temos as opções: 1 para o coeficiente A (que é o coeficiente f_0 da função exponencial $y = f_0.e^{bx}$), 2 para o coeficiente B (que é o mesmo coeficiente b da função) e 3 para o coeficiente de correlação (eleve ao quadrado para calcular o coeficiente de determinação).

Tecle:  e o visor mostrará o coeficiente f_0 da função exponencial (conforme figura 9.7.4.4);

8º - Refaça os passos 5º e 6º para voltar as opções (de variância);

9º - Tecle:  e o visor mostrará o coeficiente b da função exponencial (figura 9.7.4.5);

10º - Refaça os passos 5º e 6º para voltar as opções (de variância);

11º - Tecle:  e o visor mostrará o coeficiente de correlação da função exponencial, eleve ao quadrado teclando em  para obter o coeficiente de determinação (figura 9.7.4.6).

Para regressão logarítmica:

Inicialmente, zere a memória e as configurações da calculadora, tecle:



SHIFT, MODECLR, 3, =

2º - Tecle:  (SHIFT, 2 - refere-se variância);

A tela da calculadora mostrará as opções que estão na figura 9.7.4.1;

3º - Tecle:  (que corresponde a logarítmica);

4º - Digite os pontos (os pares) separados por vírgula e tecle em  .

A cada M+ o valor de n = 1, 2, 3 aparecerá na tela. Continue o processo até o último ponto.

5º - Tecle:  (SHIFT, 2 - refere-se variância);

6º - Tecle a seta para a direita da calculadora duas vezes, conforme indica a "mão" na figura 9.7.4.2;

7º - Na tela da figura 9.7.4.3, temos as opções: 1 para o coeficiente A (que é o mesmo coeficiente a da função logarítmica $f(x) = a + b.lnx$), 2 para o coeficiente B (que é o mesmo coeficiente b da função) e 3 para o coeficiente de correlação (eleve ao quadrado para calcular o coeficiente de determinação).

Tecle:  e o visor mostrará o coeficiente a da função logarítmica (conforme figura 9.7.4.7);

8º - Refaça os passos 5º e 6º para voltar as opções (de variância);

9º - Tecle:  e o visor mostrará o coeficiente b da função logarítmica (figura 9.7.4.8);

10º - Refaça os passos 5º e 6º para voltar as opções (de variância);

11º - Tecle:  e o visor mostrará o coeficiente de correlação da função logarítmica, eleve ao quadrado teclando  em para obter o coeficiente de determinação (figura 9.7.4.9). As figuras estão a seguir.

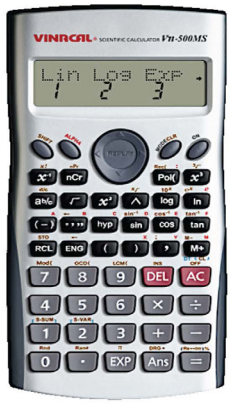


Figura 9.7.4.1



Figura 9.7.4.2



Figura 9.7.4.3

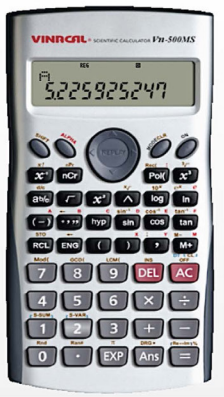


Figura 9.7.4.4



Figura 9.7.4.5



Figura 9.7.4.6

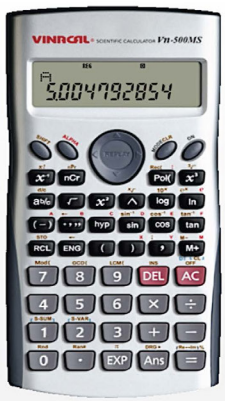


Figura 9.7.4.7



Figura 9.7.4.8



Figura 9.7.4.9

EXERCÍCIOS 9.7

1) De acordo com as informações da tabela a seguir, calcule a função exponencial que melhor se aproxima aos dados.

x	y
10	5
20	15
40	110
50	300
60	800

2) De acordo com as informações da tabela a seguir, calcule a função logarítmica que melhor se aproxima aos dados.

x	y
7	15
13	21
18	24
24	27
30	29

3) Em um estudo para verificar as relações entre os parâmetros de crescimento dos cultivares de tomateiros, constatou-se, conforme a tabela a seguir, uma relação entre a altura (cm) e o peso de matéria de seca (PMS) da planta. Calcule a função que melhor se aproxima aos dados.

$Altura\ (cm)$	$PMS(g)$
9	1,37
25	13,63
52	22,41
90	29,00
137	34,00

Fonte Adaptada: (MARTINS, VASCONCELLOS e LUCCHES, 1985)

4) Uma empresa fabricante de frutas em calda deseja avaliar o comportamento do teor de açucares das frutas com o passar dos dias. Coletou os seguintes valores:

Qtde. dias	1	2	5	8	12	16	20	24
Conc. Açúcares	17,5	19,8	26,9	31,2	37,4	44,6	52,4	56,7

Fonte: (BATALHA, 2017)

Usando o Microsoft Excel ou calculadora científica determine qual a função (afim, quadrática, exponencial ou logarítmica) que melhor se aproxima aos dados, ou seja, aquela que possui menor coeficiente de determinação.

5) Os dados a seguir referem-se a um estudo realizado sobre a quantidade de chuva e produtividade de certo cereal.

Qtde. de chuvas (em cm)	22,8	11,4	19,6	34,2	14,3	17,6	28,8	23,2
Produtividade (sacos por alqueire)	39,5	26,8	36,2	45,8	32,2	34,3	41,1	37,8

Fonte: (BATALHA, 2017)

Usando o Microsoft Excel ou calculadora científica determine qual a função (afim, quadrática, exponencial ou logarítmica) que melhor se aproxima aos dados, ou seja, aquela que possui menor coeficiente de determinação.

6) O efeito da aplicação do Superfosfato triplo (ST) e Superfosfato Triplo, revestido por polímeros (ST+Polímero), em diferentes doses de $P_2 0_5$ na área foliar, em um cultivo cafeeiro estão a seguir:

$P_2 0_5$ (g $vaso^{-1}$)	5	10	15	20
Área foliar (cm^2)	2800	3700	4100	4300

Fonte: (LACERDA, JUNIOR, *et al.*, 2015)

Usando o Microsoft Excel ou calculadora científica determine qual a função (afim, quadrática, exponencial ou logarítmica) que melhor se aproxima aos dados, ou seja, aquela que possui menor coeficiente de determinação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGROPÓS. Agropós. **Pragas Agrícolas que mais Afetam a Agricultura!**, 2018. Disponivel em: <https://agropos.com.br/pragas-agricolas/>. Acesso em: 26 abr. 2019.

AGROREPORTER. **calibracao de pulverizador costal manual**, 2018. Disponivel em: <http://agroreporter.com.br/calibracao-de-pulverizador-costal-manual/>. Acesso em: 23 mar. 2019.

ALBUQUERQUE, F. D. S. et al. Revista brasileira de engenharia agrícola e ambiental. **Crescimento e rendimento de pimentão fertigado sob diferentes lâminas de irrigação e doses de potássio**, Campina Grande, v. 15, n. 07, jul. 2011.

ALVES, J. J. L. et al. Revista Brasileira de Plantas Medicinais. **Cinética de secagem das folhas de Hyptis suaveolens**, São Paulo, v. 19, n. 2, p. 168-176, 2017.

AMARO, G. B. Embrapa. **Adubos e fertilizantes**, 2019. Disponivel em: <http://www.agencia.cnptia.embrapa.br/gestor/pimenta/arvore/CONT000gn08zc7m02wx5ok0liq1mqw825isw.html>. Acesso em: 02 abr. 2019.

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Cálculo**. Porto Alegre: Bookman, v. II, 2014.

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Cálculo**. Porto Alegre: Bookman, v. I, 2014.

ARAGUAIA, M. Brasil escola. **Escherichia coli**, 2019. Disponivel em: <https://brasilescola.uol.com.br/biologia/escherichia-coli.htm.>. Acesso em: 03 dez. 2020.

BATALHA, M. O. **Gestão agroindustrial - Gepai - grupo de estudos e pesquisas**. São Paulo: Atlas, 2017.

BEEFPOINT, E. Beefpoint educação. **O rendimento da carcaça bovina**, 2002. Disponivel em: <https://www.beefpoint.com.br/o-rendimento-da-carcaca-bovina-4992/>. Acesso em: 26 abr. 2019.

BOSCO, L. C. et al. Revista brasileira de fruticultura. **Seleção de modelos de regressão para estimar a área foliar de macieiras 'royal gala' e 'fuji suprema' sob tela antigranizo e em céu aberto**, Jaboticabal, v. 34, p. 504-514, jun. 2012.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Blucher, 1996.

BRITO, F. Agroceres. **Matéria Seca**, 2017. Disponivel em: <https://agroceresmultimix.com.br/blog/ajuste-materia-seca/>. Acesso em: 25 abr. 2019.

CARMO, M. P. D.; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. **Trigonometria, números complexos**. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

CEPEA/ESALQ. Agrolink. **Preço do café arábica sobe 8,7% em novembro**, 2010. Disponivel em: <https://www.agrolink.com.br/noticias/preco-do-cafe-arabica-sobe-8-7--em-novembro_122759.html>. Acesso em: 05 abr. 2019.

CEPLAC. gov.br. **Quantos peixes coloco no viveiro?**, 2018. Disponivel em: <http://www.ceplac.gov.br/restrito/publicacoes/cartilhas/CT_03.pdf>. Acesso em: 21 mar. 2019.

CHAVES, L. H. G. et al. Revista Ciência Agronômica. **Crescimento, distribuição e acúmulo de cobre e zinco em plantas de pinhão-manso**, Fortaleza, v. 41, n. 2, p. 167-176, jun. 2010.

COUTO, R. H. N. **Apicultura - manejo e produtos por Regina Helena Nogueira Couto e Leomam Almeida Couto.** Jaboticabal: FUNEP, 2006.

CRUZ, F. G. G. **Formulação e fabricação de racões**. Manaus: EDUA, 2017.

DALL'AGNOL, A. Agrolink. **A saga da soja no Brasil e no Mundo**, 2017. Disponivel em: <https://www.agrolink.com.br/colunistas/coluna/a-saga-da-soja-no-brasil-e-no-mundo_400724.html>. Acesso em: 29 jun. 2019.

DIAS, V. R. D. M. et al. Centro científica conhecer. **Relação entre a radiação fotossinteticamente ativa interceptada e a formação de matéria seca de frutos de manga**, 2011. Disponivel em: <http://www.conhecer.org.br/enciclop/2011a/agrarias/relacao%20entre%20radiacao.pdf>. Acesso em: 27 maio 2019.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar:** geometrial espacial, posição e métrica. São Paulo: Atual, v. 10, 1993.

DOLCE, O.; POMPEU, J. N. **Fundamentos de matemática elementar:** geometria plana. São Paulo: Atual, v. 9, 1993.

EMBRAPA. Ageitec. **Origem da acidez**, 2018. Disponivel em: <https://www.agencia.cnptia.embrapa.br/gestor/soja/arvore/CONTAG01_34_271020069132.html>. Acesso em: 21 jun. 2019.

EMBRAPA. **Nova cultivar de açaizeiro vai manter fornecimento do fruto o ano todo**, 2019. Disponivel em: <https://www.embrapa.br/busca-de-noticias/-/noticia/48210103/nova-cultivar-de-acaizeiro-vai-manter-fornecimento-do-fruto-o-ano-todo>. Acesso em: 12 dez. 2019.

EXTRA. Globo. **Alcool ou gasolina qual a melhor opcao?**, 2012. Disponivel em: <https://extra.globo.com/economia/100-dias-de-economia/alcool-ou-gasolina-qual-a-melhor-opcao-5378674.html>. Acesso em: 07 abr. 2013.

FERREIRA, R. S. **Matemática aplicada às ciências agrárias**. Viçosa : UFV, 1999.

FILHO, A. A. et al. Pubvet. **Ganho em peso médio diário de diferentes grupos genéticos de bovinos de corte**, v. 11, n. 1, p. 87-90, jan. 2017.

FILHO, A. F. D. O. et al. Revista verde de agroecologia e desenvolvimento sustentável. **crescimento de cultivares de mamoneira sob doses de torta de mamona**, Mossoró, v. 5, n. 5, p. 18-24, out. 2010.

FILHO, P. D. S. E. S. et al. Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental. **Parâmetros físicos do solo relacionados com o avanço da frente de molhamento**, Campina grande, v. 17, n. 2, p. 153-161, 2013.

FORMICONI, I. Farmnews. **Preços do milho e seu comportamento ano a ano**, 2016. Disponivel em: <http://www.farmnews.com.br/mercado/comportamento-precos-milho/>. Acesso em: 19 abr. 2019.

FORMICONI, I. Farmnews. **Variação anual dos preços de soja**, 2018. Disponivel em: <http://www.farmnews.com.br/mercado/variacao-anual-dos-precos-da-soja/>. Acesso em: 20 maio 2019.

FRANCISCO, W. D. C. E. Brasil Escola. **Escala Richter**, 2019. Disponivel em: <https://brasilescola.uol.com.br/geografia/escala-richter.htm>. Acesso em: 27 jun. 2019.

FREIRE, F. D. **Caderno de Matemática do ensino médio**. Macapá: [s.n.], v. 1, 2, 3 e 4, 2013.

FREIRE, F. D. **o uso de um livro-caderno de matemática alternativo em sala de aula:** praticidade e coerência didática voltadas para a realidade local e tecnológica. Macapá: Dissertação de mestrado, 2014.

GONCALVES, F. P. Universidade de São Paulo. **Progresso poliético e quantificação de danos da clorose Variegada dos citros em laranjeiras "natal" submetidas a deficit hídricos**, Piracicaba, 2010.

HAZZAN, S. **Fundamentos de matemática elementar:** combinatória, probabilidade. São Paulo: Atual, v. 5, 1993.

HERRMANN, J. C.; KINETZ, S. R. R.; ELSNER, T. C. UNIJUÍ. **Modelagem matemática no cultivo do alface**, 2019. Disponivel em: <https://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/modelagem/alface/index.html>. Acesso em: 23 jun. 2019.

IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar:** complexos, polinômios, equações. São Paulo: Atual, v. 6, 1993.

IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar:** geometria analítica. São Paulo: Atual, v. 7, 1993.

IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar:** trigonometria. São Paulo: Atual, v. 3, 1993.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de matemática elementar:** logarítmos. São Paulo: Atual, v. 2, 1993.

IEZZI, G.; HAZZAN, S. **Fundamentos de matemática elementar:** sequências, matrizes, determinantes, sistemas. São Paulo: Atual, v. 4, 1993.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de matemática elementar:** conjuntos, funções. São Paulo: Atual, v. 1, 1993.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C.; MACHADO, N. J. **Fundamentos de matemática elementar:** limites, derivadas, noções de integral. São Paulo: Atual, v. 8, 1993.

INSTITUTOAGRO. **Curso de produção agrícola**, 2019. Disponivel em: <https://institutoagro.com.br/custo-de-producao-agricola/>. Acesso em: 14 abr. 2019.

KHAN ACADEMY. **Crescimento exponencial e logístico**. Disponivel em: <https://pt.khanacademy.org/science/biology/ecology/population-growth-and-regulation/a/exponential-logistic-growth>. Acesso em: 28 jun. 2019.

LACERDA, J. R. et al. XXXV congresso brasileiro de ciência do solo. **Fertilizante fosfatado revestido com polímero no crescimento e fisiologia do cafeeiro**, Natal, ago. 2015.

LIMA, E. L. **Meu professor de Matemática e outras histórias**. Rio de Janeiro: IMPA e fundação vitae, 1991.

LIMA, E. L. **Geometria analítica e álgebra linear**. 2ª edição. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio - volume 1**. Rio de Janeiro: SBM, v. 1, 2006.

LIMA, E. L. et al. **Temas e problemas elementares**. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; EDUARDO WAGNER, A. C. M. **A matemática do ensino médio - volume 2**. Rio de Janeiro: SBM, v. 2, 2006.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; EDUARDO WAGNER, A. C. M. **A matemática do ensino médio - volume 3**. Rio de Janeiro: SBM, v. 3, 2006.

LUZ, M. J. D. S.; FERREIRA, G. B.; BEZERRA, J. R. C. Adubação e Correção do Solo: Procedimentos a Serem Adotados em Função dos Resultados da Análise do Solo. **EMBRAPA**, Campina Grande, out. 2002. ISSN 0100-6460.

MARCONDES, L. A.; BUENO, S. M. Revistas unilago. **Processo de lavagem a seco de cana de açúcar**, 2019. Disponivel em: <http://revistas.unilago.edu.br/index.php/revista-cientifica/article/view/220/196>. Acesso em: 25 jan. 2020.

MARTINS, G.; VASCONCELLOS, E. F. C.; LUCCHES, A. A.. Anais da escola superior de agricultura "Luiz de Queiroz". **Correlações entre parâmetros de análise de crescimento de cultivares tomateiro**, Piracicaba, v. XLII , 1985.

MARTINS, W. A. C. et al. Anais III SINPROVS. **Análise do feijão Caupi (vigna unguiculata) (l.) walp.) submetido a estresse hídrico e diferentes doses de biofertilizantes**, 2018. Disponivel em: <http://editorarealize.com.br/artigo/visualizar/40282>. Acesso em: 03 dez. 2020.

MASCARENHAS, J. R. O. Brazil document. **Densidade de plantio**, 2018. Disponivel em: <https://document.onl/documents/densidade-de-plantio.html>. Acesso em: 03 15 2019.

MENDES, J. T. G.; JUNIOR, J. B. P. **Agronegócio - uma abordagem econômica**. São Paulo: Person Prentice Hall, 2007.

MENDES, L. G. Lavoura. **Cálculo de semadura da soja**, 2019. Disponivel em: <https://blog.aegro.com.br/calculo-de-semeadura-soja/>. Acesso em: 25 abr. 2019.

MINISTÉRIO DA AGRICULTURA, P. E. A. **Projeções do agronegócio**. 7ª. ed. Brasília: SPA/mapa, 2016.

MORAIS, S. J. D. S. et al. Revista Ciência Agronômica. **Modelagem matemática das curvas de secagem e coeficiente de difusão de grãos de feijão-caupi (Vigna unguiculata (L.) Walp.)**, Fortaleza, v. 44, n. 3, p. 455-463, set. 2013.

MOREIRA, A.; BERNARDI, A. C. D. C.; RASSINI, J. B. **Fertilidade do solo e estado nutricional da alfafa cultivada nos trópicos**. São Carlos: Embrapa, 2007.

MOREIRA, A.; BERNARDI, A. C. D. C.; RASSINI, J. B. **Cultivo e utilização da alfafa nos trópicos**. São Carlos: Embrapa, 2008.

MURTEIRA, B. et al. **Introdução à estatística**. Lisboa: Escolar editora, 2015.

NETO, A. C. M. **Combinatória**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

NETO, A. C. M. **Tópicos de Matemática Elementar:** geometria euclidiana plana. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

NETO, A. C. M. **Tópicos de Matemática Elementar:** polinômios. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

NEVES, M. F.; ZYLBERSZTAJN, D.; NEVES, E. M. **Agronegócio do Brasil**. São Paulo: Saraiva, 2005.

OLIVEIRA, R. L. L. D. et al. Agroenergia. **estimativa de área foliar de feijão caupi cultivar brs tumucumak através de modelos matemáticos**, 2014. Disponivel em:

<http://www.infobibos.com/Agroenergia/CD_2014/Resumos/ResumoAgroenergia_2014_038.pdf>. Acesso em: 01 jun. 2019.

PACHECO, E. P. EMBRAPA. **Seleção e custo operacional de máqinas agrícolas**, 2000. Disponivel em: <http://iquiri.cpafac.embrapa.br/pdf/doc58.pdf>. Acesso em: 15 mar. 2019.

PANACHUKI, E. et al. Acta Sci., Agron. (Online). **Avaliação da infiltração de água no solo, em sistema de integração agricultura-pecuária, com uso de infiltrômetro de aspersão portátil**, Maringá, v. 28, n. 1, p. 129-137, jun. 2006.

PEIXOTO, C. P. et al. **Curso de fisiologia vegetal**. Cruz das almas: UFRB, 2020.

PIRES, A. V. **Bovinocultura de corte**. Piracicaba: FEALQ, 2010.

POPOV, D. Canal rural. **Confira 6 métodos de plantio para a soja e veja qual é melhor!**, 2017. Disponivel em: <https://www.canalrural.com.br/projeto-soja-brasil/noticia/saiba-qual-e-o-melhor-metodo-de-plantio-para-soja/#:~:text=das%20seis%20t%C3%A9cnicas%3A-,Plantio%20Cruzado,e%20uma%20semente%20por%20cova.>. Acesso em: 24 mar. 2019.

PRATES, F. B. D. S. et al. Revista Ciência Agronômica. **Crescimento de mudas de pinhão-manso em resposta a adubação com superfosfato simples e pó-de-rocha**, Montes Claro, v. 43, n. 2, p. 207-213, jun. 2012.

PRATES, M. Exame. **Os números que mostram o poder do agronegócio brasileiro**, 2014. Disponivel em: <https://exame.com/economia/os-numeros-que-mostram-o-poder-do-agronegocio-brasileiro/>. Acesso em: 03 abr. 2019.

PREFEITURA MUNICIPAL DE PORTO GRANDE. Plano Diretor Participativo do Município de Porto Grande. **Diagnóstico das condicionantes, deficiências e potencialidades municipais, propostas e ações**, 2013. Disponivel em: <https://ferreiragomesenergia.com.br/wp-content/uploads/sites/3/2018/04/2013.06.03-Plano-Diretor-Porto-Grande.pdf>. Acesso em: 21 jun. 2019.

REIS, G. G. D. Embrapa. **Análise e crescimento das plantas - mensuração do crescimento**, 2018. Disponivel em: <https://www.alice.cnptia.embrapa.br/bitstream/doc/374936/1/FL00953.pdf>. Acesso em: 06 jun. 2019.

REIS, L. S. et al. Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental. **Índice de área foliar e produtividade do tomate sob condições de ambiente protegido**, Campina Grande, v. 17, n. 4, p. 386-391, jan. 2013.

REUTERS. G1 AGRO. **IBGE vê safra de café 10,8% menor em 2019, a 53,4 milhões de sacas**, 2019. Disponivel em: <https://g1.globo.com/economia/agronegocios/noticia/2019/01/10/ibge-ve-safra-de-cafe-108-menor-em-2019-com-534-milhoes-de-sacas.ghtml>. Acesso em: 24 abr. 2019.

RIBEIRO, J. **Matemática:** ciência, linguagem e tecnologia. São Paulo: Scipcione, v. 1, 2010.

RIBEIRO, J. **Matemática:** ciência, linguagem e tecnologia. São Paulo: Scipione, v. 2, 2010.

RIBEIRO, J. **Matemática:** ciência, linguagem e tecnologia. São Paulo: Scipione, v. 3, 2010.

RIBEIRO, R. C. ufrrj. **Estabelecimento de Leguminosas em Pastagens de Brachiaria humidicola: Variações Sazonais de Atributos do Dossel Vegetativo** , Seropédica, p. 1, 27-32, set. 2006.

SEAGRI, A. Estado de Alagoas. **Agricultores do Sertão produzem mais de 45 sacos de milho por tarefa**, 2011. Disponivel em: <http://www.agricultura.al.gov.br/sala-de-imprensa/noticias/2011/dezembro/agricultores-do-sertao-produzem-mais-de-45-sacos-de-milho-por-tarefa>. Acesso em: 01 abr. 2019.

SILVA, É. D. B. D. Agronegócio em foco. **Estimando a produtividade na cultura da soja**, 2015. Disponivel em: <http://www.pioneersementes.com.br/blog/46/estimando-a-produtividade-na-cultura-da-soja>. Acesso em: 25 jun. 2019.

SILVA, G. J.; MAIA, J. C. D. S.; BIANCHINI, A. Revista brasileira de ciências do solo. **Crescimento da parte área de plantas cultivadas em vaso**, Cuiabá, p. 30;31-40, 2006.

SILVA, I. D.; SEGANTINE, P. L. **Exercícios de topografia:** teoria e prática de geomática. Rio de Janeiro: Elsevier, 2018.

SILVA, J. A. A. D.; NETO, F. D. P. **Princípios básicos de dendrometria**. Departamente de Ciência Florestal - Brasília: UNB, 1979.

SILVA, M. N. P. D. Brasil escola. **Medidas Agrárias**, 2018. Disponivel em: <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/medidas-agrarias.htm>. Acesso em: 15 mar. 2018.

SORATTO, R. P. et al. Revista Ciência Agronômica. **Fontes alternativas e doses de nitrogênio no milho safrinha em sucessão à soja**, Fortaleza, v. 41, n. 4, p. 511-518, dez. 2010.

SOUZA, D. P. D. et al. XLV Congresso brasileiro de engenharia agrícola. **Caracterização do coeficiente de extinsão de cultivares de cana-de-açúcar**, Florianópolis, jul. 2016.

SOUZA, N. Estadão. **Milho ganha novo espaçamento**, São Paulo, 28 maio 2008. Disponivel em: <https://www.estadao.com.br/noticias/geral,milho-ganha-novo-espacamento,179169>. Acesso em: 22 mar. 2020.

TAVARES, G. D. S. et al. International Journal of Development Research. **Análise da produção e comercialização de açaí no estado do Pará - Brasil**, Belém, v. 10, n. 04, p. 35215-35221, abr. 2020. ISSN 2230-9926.

TECHTUDO. Eletrônicos. **Churrasqueira que funciona à luz solar começa a ser exportada**, 2011. Disponivel em: <https://www.techtudo.com.br/noticias/noticia/2011/10/churrasqueira-que-funciona-luz-solar-comeca-ser-exportada.html>. Acesso em: 01 jul. 2019.

THUM, A. B. et al. **Topografia para estudantes de Arquitetura, Engenharia e Geologia**. São Leopoldo: UNISINOS, 2003.

TIDESCHART. **Horários e tábuas de marés para Macapá**, 2019. Disponivel em: <https://pt.tideschart.com/Brazil/Amapa/Macapa/>. Acesso em: 01 ago. 2019.

TONINI, H.; FINGER, C. A. G.; SCHNEIDER, P. R. Revista do Centro de Ciências Rurais. **O crescimento da Nectandra megapotamica Mez., em floresta nativa na depressão central do Estado do Rio Grande do Sul**, Santa Maria, v. 33, n. 1, p. 85-90, fev. 2003.

TSUNECHIRO, A.; MARTINS, V. A. Instituto de Economia Agrícola (IEA). **Produção recorde de sorgo no Estado de São Paulo**, 2003. Disponivel em: <http://www.iea.agricultura.sp.gov.br/out/LerTexto.php?codTexto=837>. Acesso em: 15 maio 2019.

VELOSO, C. A. C. et al. Embrapa. **Resposta diferencial de cultivares de milho em função da adição da adubação fosfatada em latossolo amarelo do oeste paraense**, Belém, dez. 2005.

WIKIPÉDIA. **jogo de memória**, 2019. Disponivel em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Jogo_de_mem%C3%B3ria>. Acesso em: 27 ago. 2019.

TABELAS

Tabela 1: Tabela sobre unidades de medidas

Unidades de comprimento:

Categoria	Unidade	Símbolo	Medida
Múltiplos:	Quilômetro	km	$1000\ m$
	Hectômetro	hm	$100\ m$
	Decâmetro	dam	$10\ m$
Unidade fundamental	Metro	m	$1\ m$
Submúltiplos:	Decímetro	dm	$0{,}1\ m$
	Centímetro	cm	$0{,}01\ m$
	Milímetro	mm	$0{,}001\ m$

×10 ÷10

Unidades de área:

Categoria	Unidade	Símbolo	Medida em
Múltiplos:	Quilômetro quadrado	km^2	$1.000.000\ m^2$
	Hectômetro quadrado	hm^2	$10.000\ m^2$
	Decâmetro quadrado	dam^2	$100\ m^2$
Unidade	Metro quadrado	m^2	$1\ m^2$
Submúltiplos:	Decímetro quadrado	dm^2	$0{,}01\ m^2$
	Centímetro quadrado	cm^2	$0{,}0001\ m^2$
	Milímetro quadrado	mm^2	$0{,}000001\ m^2$

×100 ÷100

Unidades de volume:

Categoria	Unidade	Símbolo	Medida em
Múltiplos:	Quilômetro cúbico	km^3	$1.000.000.000\ m^3$
	Hectômetro cúbico	hm^3	$1.000.000\ m^3$
	Decâmetro cúbico	dam^3	$1000\ m^3$
Unidade	Metro cúbico	m^3	$1\ m^3$
Submúltiplos:	Decímetro cúbico	dm^3	$0{,}001\ m^3$
	Centímetro cúbico	cm^3	$0{,}000001\ m^3$
	Milímetro cúbico	mm^3	$0{,}000000001\ m^3$

×1000 ÷1000

Algumas unidades de volume são relacionadas com as medidas de capacidade:

Categoria	Volume	Capacidade
Múltiplos	$1\ m^3$	1000 litros ($1000l$)
Unidade fundamental	$1\ dm^3$	1 litro ($1l$)
Submúltiplos:	$1\ cm^3$	1 mililitro ($1ml$)

Medidas agrárias:

Categoria	Unidade	Símbolo	Medida em m²
Múltiplo:	Hectare	ha	$10.000\ m^2$
Unidade fundamental	Are	a	$100\ m^2$
Submúltiplo:	Centiare	ca	$1\ m^2$

Tabela 2: Tabela trigonométrica

(°)	Rad	sen	cos	tg
0	0,02	0	1	0
1	0,03	0,017452	0,999848	0,017455
2	0,05	0,034899	0,999391	0,034921
3	0,07	0,052336	0,99863	0,052408
4	0,09	0,069756	0,997564	0,069927
5	0,10	0,087156	0,996195	0,087489
6	0,12	0,104528	0,994522	0,105104
7	0,14	0,121869	0,992546	0,122785
8	0,16	0,139173	0,990268	0,140541
9	0,17	0,156434	0,987688	0,158384
10	0,19	0,173648	0,984808	0,176327
11	0,21	0,190809	0,981627	0,19438
12	0,23	0,207912	0,978148	0,212557
13	0,24	0,224951	0,97437	0,230868
14	0,26	0,241922	0,970296	0,249328
15	0,28	0,258819	0,965926	0,267949
16	0,30	0,275637	0,961262	0,286745
17	0,31	0,292372	0,956305	0,305731
18	0,33	0,309017	0,951057	0,32492
19	0,35	0,325568	0,945519	0,344328
20	0,37	0,34202	0,939693	0,36397
21	0,38	0,358368	0,93358	0,383864
22	0,40	0,374607	0,927184	0,404026
23	0,42	0,390731	0,920505	0,424475
24	0,44	0,406737	0,913545	0,445229
25	0,45	0,422618	0,906308	0,466308
26	0,47	0,438371	0,898794	0,487733
27	0,49	0,45399	0,891007	0,509525
28	0,51	0,469472	0,882948	0,531709
29	0,52	0,48481	0,87462	0,554309
30	0,54	0,5	0,866025	0,57735
31	0,56	0,515038	0,857167	0,600861
32	0,58	0,529919	0,848048	0,624869
33	0,59	0,544639	0,838671	0,649408
34	0,61	0,559193	0,829038	0,674509
35	0,63	0,573576	0,819152	0,700208
36	0,65	0,587785	0,809017	0,726543
37	0,66	0,601815	0,798636	0,753554
38	0,68	0,615661	0,788011	0,781286
39	0,70	0,62932	0,777146	0,809784
40	0,72	0,642788	0,766044	0,8391
41	0,73	0,656059	0,75471	0,869287
42	0,75	0,669131	0,743145	0,900404
43	0,77	0,681998	0,731354	0,932515
44	0,79	0,694658	0,71934	0,965689
45	0,02	0,707107	0,707107	1,03553
46	0,80	0,71934	0,694658	1,072369
47	0,82	0,731354	0,681998	1,110613
48	0,84	0,743145	0,669131	1,150368
49	0,86	0,75471	0,656059	1,191754
50	0,87	0,766044	0,642788	1,03553

(°)	Rad	sen	cos	tg
51	0,89	0,777146	0,62932	1,234897
52	0,91	0,788011	0,615661	1,279942
53	0,93	0,798636	0,601815	1,327045
54	0,94	0,809017	0,587785	1,376382
55	0,96	0,819152	0,573576	1,428148
56	0,98	0,829038	0,559193	1,482561
57	0,99	0,838671	0,544639	1,539865
58	1,01	0,848048	0,529919	1,600335
59	1,03	0,857167	0,515038	1,664279
60	1,05	0,866025	0,5	1,732051
61	1,06	0,87462	0,48481	1,804048
62	1,08	0,882948	0,469472	1,880726
63	1,10	0,891007	0,45399	1,962611
64	1,12	0,898794	0,438371	2,050304
65	1,13	0,906308	0,422618	2,144507
66	1,15	0,913545	0,406737	2,246037
67	1,17	0,920505	0,390731	2,355852
68	1,19	0,927184	0,374607	2,475087
69	1,20	0,93358	0,358368	2,605089
70	1,22	0,939693	0,34202	2,747477
71	1,24	0,945519	0,325568	2,904211
72	1,26	0,951057	0,309017	3,077684
73	1,27	0,956305	0,292372	3,270853
74	1,29	0,961262	0,275637	3,487414
75	1,31	0,965926	0,258819	3,732051
76	1,33	0,970296	0,241922	4,010781
77	1,34	0,97437	0,224951	4,331476
78	1,36	0,978148	0,207912	4,70463
79	1,38	0,981627	0,190809	5,144554
80	1,40	0,984808	0,173648	5,671282
81	1,41	0,987688	0,156434	6,313752
82	1,43	0,990268	0,139173	7,11537
83	1,45	0,992546	0,121869	8,144346
84	1,47	0,994522	0,104528	9,514364
85	1,48	0,996195	0,087156	11,43005
86	1,50	0,997564	0,069756	14,30067
87	1,52	0,99863	0,052336	19,08114
88	1,54	0,999391	0,034899	28,63625
89	1,55	0,999848	0,017452	57,28996
90	1,57	1	0	∄
120	2,09	0,866025	-0,5	-1,732051
150	2,62	0,5	-0,866025	-0,57735
180	3,14	0	1	0
210	3,67	-0,5	-0,866025	0,57735
240	4,19	-0,866025	-0,5	1,732051
270	4,71	-1	0	∄
300	5,23	-0,866025	0,5	-1,732051
330	5,76	-0,5	0,866025	-0,57735
360	6,28	0	1	0

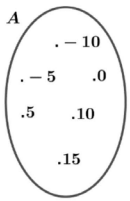
GABARITOS E SOLUÇÕES

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 1.1

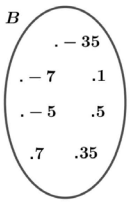
1) $A = \{c, a, d, e, r, n, o\}$
$B = \{polegar, indicador, dedo\ médio, anelar, dedo\ mínimo\ \}$
$C = \{Rio\ de\ Janeiro, Rio\ Branco, Recife\}$

---

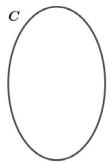
2) $A = \{-10, -5, 0,\ 5, 10, 15\}$



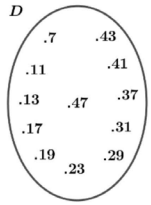
$B = \{-35, -7, -5, 1, 5, 7, 35\}$



$C = \emptyset$



$D = \{7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\}$



---

3) $A = \{x | x\ é\ divisor\ inteiro\ de\ 4\}$
$B = \{x | x\ é\ par\ positivo\}$
$C = \{x | x\ é\ letra\ da\ palavra\ vida\}$
$D = \{x | x\ é\ capital\ do\ Brasil\}$

---

4)

a) $7 \notin A$
b) $B \not\supset A$
c) $1 \notin B$
d) $A \supset B$
e) $\{-1\} \not\subset A$
f) $\{1, 2, 3, a, b\} \supset A$

---

5)

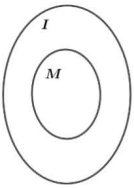
a) V
b) F (símbolo inadequado)
c) V
d) F
e) F
f) F (símbolo inadequado)
g) V
h) F (símbolo inadequado)
i) F
j) V

---

6)

a) F
b) F
c) F(símbolo inadequado)
d) V
e) F
f) V
g) F(símbolo inadequado)
h) V
i) V
j) V

7) $M \rightarrow Matemático$
$I \rightarrow Inteligente$



8)128

9)10 *elementos*

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 1.2

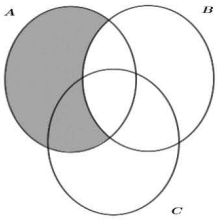
1)

a) $\{10, 11\}$
b) $\{14, 15, 16\}$
c) $\{11\}$
d) $\{10\}$
e) $\{10, 11, 12\}$
f) $\{10, 12, 14, 15, 16\}$

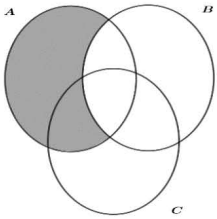
---

2)

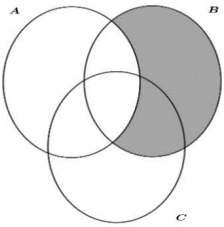
a)



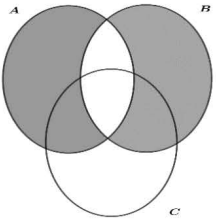
b)



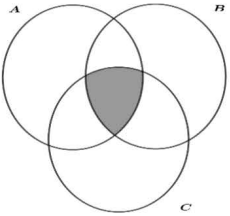
c)



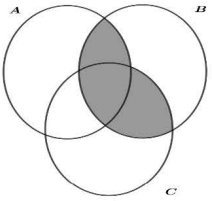
d)



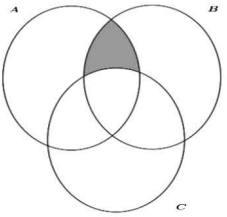
e)



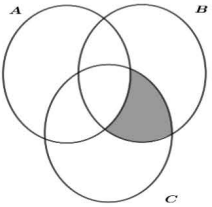
f)



g)



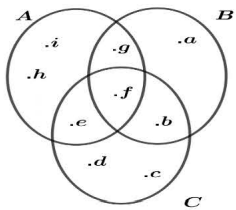
h)



3)
a) $\{5, 6, 7\}$
b) $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\} = B$
c) $\emptyset$
d) $\{-1, 0, 1\}$
e) $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$
f) $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

---

4) $A = \{e, f, g, h, i\}$
$B = \{a, b, f, g\}$
$C = \{b, c, d, e, f\}$



---

5) Letra c.
6) Letra c.

---

7)
a) F
b) F
c) V
d) F(símbolo inadequado)
e) V
f) V
g) F
h) V
i) V
j) V

---

8) 8 formas.
9) 15 vitaminas (ou sucos) diferentes.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 1.3

1) 6
2) a)100. b) 400. c) 700.
3) a) 330. b) 70.
4) $A = \{a, b, d, f, g\}$ e $B = \{c, e, f, g, h\}$
5) Letra b.
6) 450.
7) Letra a.
8) Letra e.
9) Letra c.
10)10.
11) 10%.
12) Letra e.
13) 140.
14) 20%.

---

15)
a) 125
b) 50
c) 100
d) 75

---

16)
a) 30
b) 180
c) 480
d) 500

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 1.4

1)
a) V
b) F
c) V
d) V
e) F
f) F(símbolo inadequado)

g) V
h) F
i) F
j) F
k) V
l) F
m)F
n) F
o) F
p) V
q) F
r) V
s) F
t) F
u) F
v) V
w)F
x) F
y) V

2) Letra c.

3)

a)



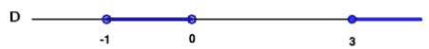
b)



c)



d)



4)

a) [1,2]
b) [0,2]
c) [1,2]
d) $]1,\frac{4}{3}[$

5)

a) $\mathbb{Q}$
b) $\mathbb{Z}$
c) $\mathbb{Q}$
d) $\mathbb{R}$
e) $\mathbb{I}$
f) $\mathbb{Q}$
g) $\mathbb{Z}$
h) $\mathbb{N}$

6)

a) $\{x \in \mathbb{R} | -2 \leq x \leq 8\} = A$
b) $\{x \in \mathbb{R} | x \leq 13\} = B$
c) $\{x \in \mathbb{R} | -2 \leq x < 1\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} | x \leq -3\}$

7) Letra c.

8) Letra e.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 1.5

1)

a) 1250 plantas por hectare.
b) 20.000 plantas por hectare.

2) 5000 metros lineares.
3) 80.000 plantas por hectare.
4) 1200 litros por hora.
5) $1,2\ ha$ por hora.
6) 24 litros por hora.

7)

a) 0,8.
b) 1,6m.

8) A gasolina.
9) Letra c.
10) Letra e.
11) ≅317.460 plantas por hectare.
12) Letra a.

13)
a) 12. b) 125. c) 31,818181...

14)
a) $\frac{8}{9}$. b) $\frac{211}{99}$. c) $\frac{999569}{99900}$.

15)
a) 30 estacas. b) 42 estacas e 5 metros.

16) 2 metros.
17) Letra c.
18) Letra d.
19) Letra c.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 1.6

1)
a) 400 litros/hora.
b) 150 minutos ou 2 horas e 30 minutos.
c) 4050 minutos ou 2 dias, 19 horas e 30 minutos.

2) 9000 laranjas.

3)
a) 8 viagens. b) 184 caixa.

4) 36 kg de nitrogênio, 270 kg de fósforo e 144 kg de potássio.

5)
a) Grupo aberdeen angus.
b) 186kg o aberdeen angus, 164,92 kg o nelore e 177,32kg o composto montana.

6)
a) $x = 6$. c) $x = 15$.
b) $x = 1$. d) $x = 5$.

7) 25cm x 25cm
8) 1:1000.
9) 4cm.
10) Velocidade: 120 km/h. Tempo: 46,15 minutos.
11) O agricultor A deve receber R$ 175,00, B R$ 200,00 e o agricultor C, R$ 125,00.
12) 48 limões.
13) 600 peixes.
14) 160 cm ou 1,6 m.
15) letra e.
16) letra c.
17) letra c.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 2.1

1) a) inversamente proporcionais
b) diretamente proporcionais
2) 270 aspersores.
3) 607,5 km.
4) A.
5) 24 sacos.
6) 12 mangueiras.
7) a) 180 sacos b)100 m^2
8) a) 300 litros.
b) 300 litros.
c) 0,13333...litros ou 133,33 ml.
9) letra b.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 2.2

1) 30 agricultores.
2) 3 latas.
3) 0,75 toneladas ou 750kg.
4) 2000 m^2
5) Letra a.
6) Letra b.
7) 40 colhedoras.
8) 48 máquinas.
9) 18,8 h ou 18h10min40s.
10) 135 kw.
11) 8 horas/dia.
12) 50 agricultores.
13) 24 horas/dia.
14) 3,6 horas ou 3h36min.
15) 120 dias.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 2.3

1)
a) 59%. b) 1,4 trilhões de reais.

2) 45%.
3)19,2%.

4)
a) 10%. b) 9%. c) 11,11%.

5)1ª.
6)214 alunos passaram e 1036 alunos não passaram no exame.

7)
a) 59,86%.
b) 19,01% (o percentual total de queda não é a soma dos percentuais parciais).

8) 48 frutas por pé.
9) 24%.
10) Letra c.
11) Letra d.

12)
a) 44,44%. b) 220g. c) 62%.

13)4,05 kg e 11,25 kg, respectivamente.

14)
a) 12,5 sementes. b) 71,42%.

15)
a) 54,16%. b) 48%. c) 55,52%.

16) Letra b.
17) 12 kg de nitrogênio, 90 kg de fósforo e 48 kg de potássio.

18)
a) NPK 20-10-10.

b) Misturar as formulações 16-10-10 com 04-20-20. A melhor estratégia para descobrir quais formulações misturar, é utilizando a média aritmética.
c) Retirar 8 kg de potássio, retirar 2kg de fósforo e manter o nitrogênio no mesmo peso.

19)
a) 3000kg. b) 42,85%. c) 40. d) 2º exemplo.

20) letra b.
21) letra b.
22) letra e.
23) letra c.
24) letra b.
25) letra c.
26) letra d.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 3.1

1)
a) P.A decrescente.
b) P.A decrescente.
c) Não e uma P.A.
d) P.A decrescente.
e) P.A crescente.
f) P.A crescente.
g) P.A constante.
h) P.A crescente
i) Não é uma P.A.

2)
a) -5.
b) 13.
c) 75.
d) -88.
e) 1.

3)
a) (3, 8, 13, 18, 23).
b) (35, 30, 25, 20, 15).
c) (-175, -160, -145, -130, -115)
d) (6, -7, -20, -33, -46).

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 3.2

1) $r = 2$ e $a_{10} = 19$.
2) $r = -4$ e $a_9 = -36$.
3) $r = 2$ e $a_{20} = 40$.
4) $r = 1$ e $a_{100} = 49$.
5) $x = 2$.
6) Para $x = 2 \Rightarrow (1, 1, 1)$.
Para $x = \frac{-1}{2} \Rightarrow (-2, \frac{1}{4}, \frac{5}{2})$.
7) (-2, 5, 12).
8) (-18, -4, 10, 24, 38).
9) 67 números impares.
10) $r = 23$.
11) $a_{10} = 79$.
12) Ano de 2054.
13) Ano de 2092.
14) 6 elementos.

15)
a) (30, 53, 76, 99, 122, 145, 168).
b) (-15, -13, -11, -9, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, 12, 13, 15).
c) (0, 100, 200, 300, 400, ..., 1900, 2000).
d) (-90, -54, -18, 18, 54, 90)

16) A cada um pé de mamoeiro, deve-se plantar 3 pés de bananeira.
17) a)3 metros. b) 75 metros de um canto e 72 metros do outro.
18)(116km, 132km, 148km, 164km, 180km, 196km, 212km)
19) Letra c.
20) Letra c.
21) Letra d.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 3.3

1) S=900.
2) S=0.
3) S=205.
4) S=144.
5) 10.
6) Esqueceu o número 33.
7) Letra a.
8) Letra b.
9) Letra d.
10) Letra d.
11) 21 palitos.
12) a) 31 palitos b) 33 quadrados.
13) 1500 poltronas.
14) Pegue 1 moeda da 1ª pilha, 2 da 2ª, 3 da 3ª e assim por diante. Totalizando de 55moedas na balança. Se as moedas de 11g estiver na 1ª pilha o peso será 54×10+11=551g. Se as moedas de 11g estiverem na 2ª pilha o peso será 53×10+22=552g. Se as moedas de 11g estiverem na 3ª pilha o peso será 52×10+33=553g, e assim por diante. Logo, a diferença entre o peso acusado na balança e 550, será exatamente o número da pilha onde há moedas de 11g.
15) Letra c.
16) 105 apertos de mão.
17) 465 plantas.
18) a) 80 plantas. b) 4704 plantas.
19) a) 0,4 litros. b) 22 litros.
20) Letra c.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 3.4

1)
a) Não é P.G.
b) P.G constante.
c) P.G decrescente.
d) P.G crescente.
e) P.G decrescente.
f) P.G alternante.

2)
a) 3/4.
b) 44.
c) $\pm$ 8.
d) -999.
e) $\pm$ 1.

3)
a) (-1, -2, -4, -8, -16).
b) (2, -6, -18, -54, 162).
c) (4, 8, 16, 32, 64).
d) (-500, -500, -500, -500, -500).

4) $x = 8$.
5) Sequência constante.
6) $n - 1$ elementos.
7) Letra e.
8) Letra d.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 3.5

1) $a_6 = 96$.
2) $a_{10} = 6561$.
3) $a_5 = 4$.
4) $a_7 = 4096$.
5)a) $a_2 = -2$ e $a_3 = -4$
b) $a_1 = 810$, $a_3 = 90$ e $a_4 = 30$
c) $a_1 = -7$, $a_2 = 7$ e $a_3 = -7$
6) a) 12 termos.
b) 10 termos.
c) 8 termos.
7) $a_3 = 36$.
8) $a_2 = 125$.
9) (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024).
10) (7, 28, 112, 448, 1792, 7168, 28672).
11) $a_7 = \frac{1}{4}$.
12) (49, 56, 64).
13) 243 pés de laranja.
14) Letra c.
15) Errado.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 3.6

1) $S_9 = 1533.$
2) $S_5 = -331.$
3) $S_{30} = 0.$
4) $x = 2.$
5) $a_3 = 20.$
6) a) $S_{1000} = 0.$
   b) $S_{897} = 1.$
   c) $S_n = \begin{cases} 0, se\ n\ for\ par. \\ 1, se\ n\ for\ ímpar. \end{cases}$
7) Sim. Pois, trata-se da soma de n +1 termos de uma P.G de razão 2 e $a_1 = 1.$
8) $S = 12345678900.$
9) Letra b.
10) Letra e.
11) a) (0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80)
    b) (105, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128).
12) Letra a.
13) Letra e.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 3.7

1) $S = 400.$

2)
   a) $S = 6.$
   b) $S = \frac{5}{4}.$
   c) $S = \frac{800}{9}$
   d) $S = \frac{10^6}{9}$

3) $x = 5.$
4) $x = 6.$
5) 60 metros.
6) $\frac{2}{9}$ e $\frac{28}{9}.$
7) 5.
8) A dívida jamais será quitada.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 3.8

1) $j = 100{,}00$ e $M = 1.100{,}00.$
2) $M = 18.000{,}00.$
3) $M = 30.075{,}00.$
4) $M = 767.200{,}00.$
5) $t = 8$ meses.
6) $c = 150{,}00$
7) Letra c.
8) letra c.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 3.9

1) Não. Como os juros são incorporados ao capital, a taxa correta é aproximadamente 0,95% a.m.
2) $M = 131.305{,}86.$
3) $M = 15.393{,}46.$
4) $c = 730{,}00.$
5) $M = 10.873{,}10$ e $i = 8{,}73\%\ a.a.$
6) Letra c.
7) Letra a.
8) Letra c.
9) $M = 71.848{,}43.$
10) Letra b.
11) $d = c.(1 - i)^t.$
12) a) Após 11 meses.
    b) Estão em P.G.
    c) razão 0,77 (equivale ao produto 0,7x1,1).
13) A dívida no cheque especial será de R$ 1586,87 e no cartão de crédito R$ 1610,51. Portanto, ele deve usar o cheque especial.
14) a) 6 meses.
    b) 10 meses.
15) 33,1%.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 4.1

1)

a) $\overline{M}$ = 67,5.
M_o = 58.
M_d = 66.
D_m = 8,7.
V = 91,45.
D_p = 9,56.

b) $\overline{M}$ = 1,33...
M_o = 5 e 1.
M_d = 1.
D_m = 2,15.
V = 6,89.
D_p = 2,62.

c) $\overline{M}$ = 190.
M_o = 100.
M_d = 140.
D_m = 96.
V = 11.460.
D_p = 107,051.

d) $\overline{M}$ = 42,025.
M_o = 30,2 / 49,5 / 35,7 / 45,4 / 49,4.
M_d = 45,4.
D_m = 7,48.
V = 62,43.
D_p = 7,90.

---

2) Letra d.

3)

$\overline{M}$ = 61,24.
M_o não tem.
M_d = 68,1.
D_m = 13,57.
V = 213,18.
D_p = 14,6.

---

4) Letra b.
5) Letra e.
6) Letra d.
7)

$\overline{M}$ = 3.
M_o = 3.
M_d = 3.
$D_m \cong$ 1,42.
V $\cong$ 1,5.
$D_p \cong$ 1,23

---

8) R$ 2.400,00.
9) Letra c.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 4.2

1) Letra d.
2) Letra a.
3) Letra d.
4) Letra a.
5) Letra d.
6) Letra b.
7) Letra e.
8) Letra d.
9) Letra c.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 5.1

1) É função. D(f)={-1,0,3], CD(f)={0,1,3,9,10} e Im(f)={1,3,9}.
2) Não é função.
3) É função. D(f)={0,3,6,9], CD(f)={0,3,7,12,27} e Im(f)={03,12,27}.
4) Letra c.
5) Letra d.
6) Sim. Pois, todos os anos o município deve ter alguma produtividade (mesmo que seja zero) e essa produtividade será sempre única.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 5.2

1)

a) Não é função.

b) Não é função.

c) Não é função.

d) É função.

2) Letra a.

3) $f(0)=1$; $f(-1)=4$ e $f(1/3)=4/3$.

4) $f(0)=3$; $f(-1)=2$ e $f(1/2)=47/16$.

5)

a) $\{x \in \mathbb{R} | x \neq 7\}$.

b) $\{x \in \mathbb{R} | x \neq \pm 2\}$.

c) $\{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$.

d) $\{x \in \mathbb{R} | x \leq -3, x > 3 \text{ e } x \neq 4\}$.

6)

a) $f(0)=0$; $f(2)=-2$ e $f(3)=-15/4$.

b) $f(0)=-9/4$; $\nexists f(2)$ e $f(3)=9/5$.

c) $\nexists f(0)$; $f(2)=\sqrt{2}/2$ e $f(3)=\sqrt{3}/3$.

d) $\nexists f(0)$; $\nexists f(2)$ e $\nexists f(3)$.

7)

a) Crescente:]-2,0[e]2,3[.
Decrescente:]0,2[.
Contínua.

b) Constante:]0,2[.
Crescente:]2,3[.
Decrescente:]3,6[. Descontínua.

8) Letra e.

9) Sim. $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | \, 1{,}0 \leq x \leq 1{,}5\}$.

10)

a) Sobrejetiva.

b) Bijetiva.

c) Sem classificação.

d) Injetiva.

11) Letra e.

12) Letra a.

13) Letra a.

14) a) ímpar b) par c) par d) ímpar e)nem par e nem impar

15) a) par b) ímpar c) par d)nem par e nem impar

16) Letra e.

17) letra c.

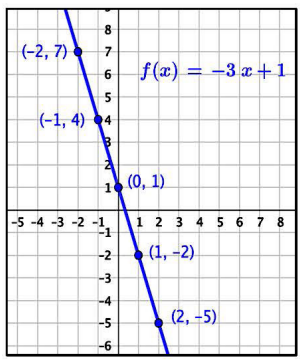
18) a) $f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$ b) $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{3}$ c) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x-1}{2}}$

19) $B = \{x \in \mathbb{R} | \, x \geq 1\}$, $A = \{x \in \mathbb{R} | \, x \geq 0\}$ e $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$. 20)Letra d.

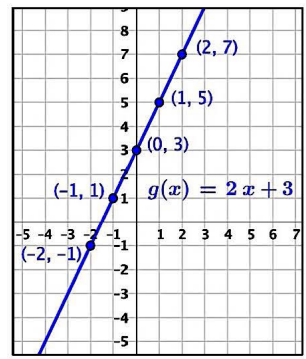
GABARITO DOS EXERCÍCIOS 6.1

1)

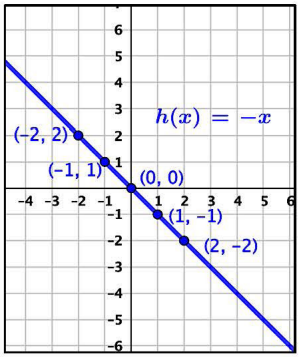
a)



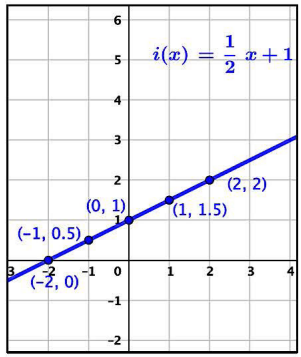
b)



c)



d)



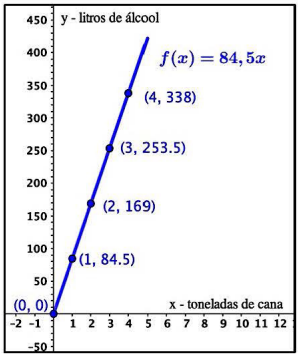
2)

a) Sim.
b) Não.
c) Não.
d) Não.
e) Sim.
f) Sim.

3)

a) Crescente.
b) Decrescente.
c) Crescente.
d) Decrescente.
e) Constante.
f) Decrescente.
g) Constante.
h) Crescente.

4) $f(x) = 150x + 300$.
5) $f(x) = 2{,}5x + 2$ e R$ 22,00.
6) 1,5m e 4,7 anos.
7) 4,5 horas.
8) 19,6g
9) ≅18,39 cm²
10) $f(x) = 84{,}5x$



GABARITO DOS EXERCÍCIOS 6.2

1)

a) $x = 6$.
b) $x = 5$.
c) $z = -5$.
d) $t = 9$.

2) $t_c = 8°C$. e $t_x = 460$.

3) Letra e.

4) 20 produtos.

5) Março teve lucro zero, janeiro e fevereiro prejuízo.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 6.3

1)

a) $f(x) = -x - 1$.
b) $f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{9}{4}$.
c) $f(x) = \frac{5}{4}x + 5$.
d) $f(x) = -\frac{4}{9}x + \frac{2}{9}$.

2)

a) $f(x) = 4x - 3$.

b) $f(x) = -7x + 14$.

3) Letra e.

4) $f(x) = -x + 5$.

5) $f(x) = x$.

6) $f(x) = 2x - 3{,}48$.

7) $f(x) = 2{,}1x + 4{,}4$.

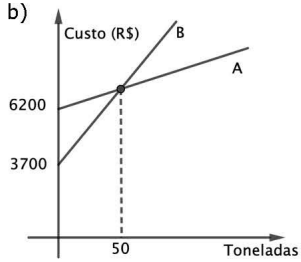
x	-4	0	7	9	12
y	-4	4,4	19,1	23,3	29,6

8) Sim. Basta ver que de 1 para 2, cresceu 3cm, o mesmo deve acontecer de 2 para 3, então: 9+3= 12cm.

9)a) $f(x) = \frac{5}{4}x$. b)24g.

10)

a) 50 toneladas. b)



11) 16 anos.

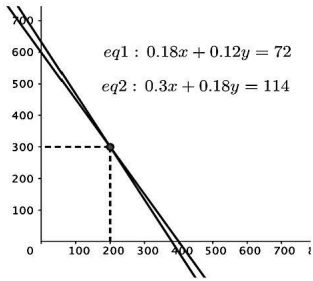
12) TAL = 100.

13)

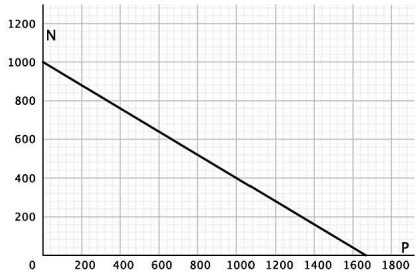
a) $y = 2x + 3 \Rightarrow$ Planta 1.
$y = 3x + 2 \Rightarrow$ Planta 2.

b) 1 mês.

14) 200 gramas de Nitrogênio e 300 gramas de Potássio.



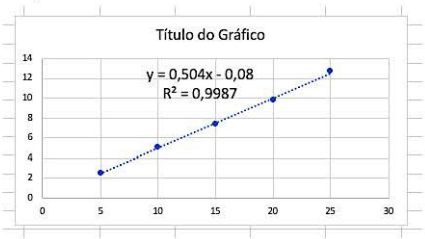
15) $0{,}5N + 0{,}3P = 500$.



16) R$ 0,70 e 400 toneladas.
17)
a) Todos os nutrientes, com exceção do alumínio, possuem seus valores máximos nessa faixa.
b) Ph ≅ 6,16.
18) a) $y = 25x$ b) 400 plantas por hectare.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 6.4

1)
a) $y = 0{,}51x - 0{,}17$.
b) $y = 0{,}504x - 0{,}08$.
c) $R^2 = 0{,}9987$.
d) $y = 20{,}08cm$.
e) Gráfico:



f) Confirmado.

---

2)
a) $y = 1{,}04x - 3{,}98$.
b) $y = 1{,}044x - 4{,}04$.
$R^2 = 0{,}9859$.
c) $y = 37{,}72m$.
d) Gráfico:



e) Confirmado.

---

3)
a) Fazendo 1,2,3... na 1ª coluna: $y = 2710{,}1x + 58407$.
b) 71.957,5 mil toneladas.

---

4)
a) $y = 303{,}73x + 1046{,}3$. b) $R^2 = 1$. c) 5602,08.

---

5)
a) $y = 0{,}6962x$. b) 75.

---

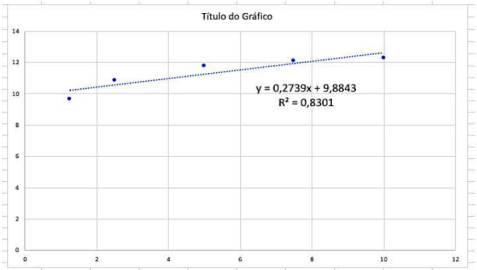
6)
a) $y = 0{,}052x + 17{,}61$ ⇒Coluna 2.
$y = 0{,}051x + 14{,}393$ ⇒Coluna 3.
b) $y = 22{,}81g$.
c) $x = 117{,}78$ml.

---

7)
a) $y = 560{,}3x + 1432{,}1$ b) $R^2 = 0{,}9732$. c) 9836,6 toneladas.

---

8)
a) $y = 0{,}2739x + 9{,}8843$



b) $R^2 = 0{,}8301$.

c) $y = 13{,}99cm$.

---

9)

a) $y = 73550{,}381x - 147188470{,}30$



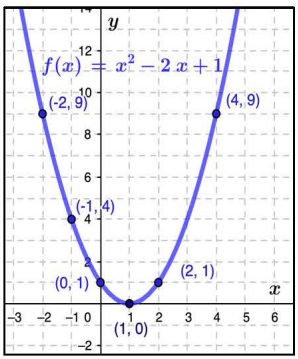
b) $R^2 = 0{,}8493$.

c) $y = 1309746{,}97\ toneladas$.

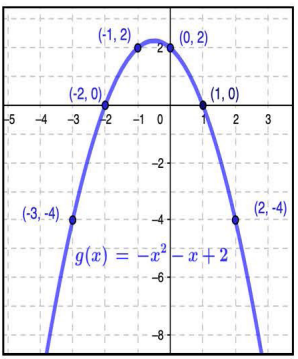
GABARITO DOS EXERCÍCIOS 7.1

1)

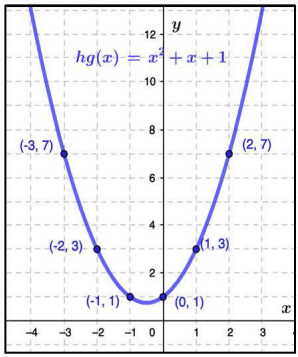
a)



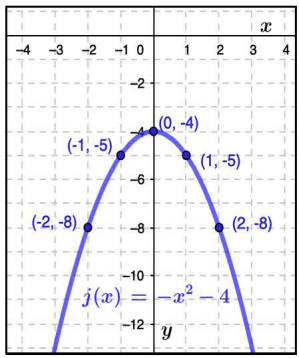
b)



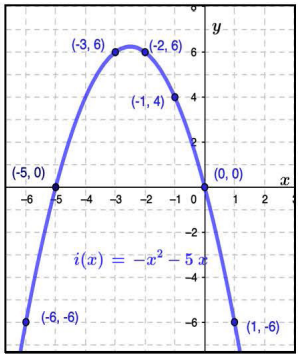
c)



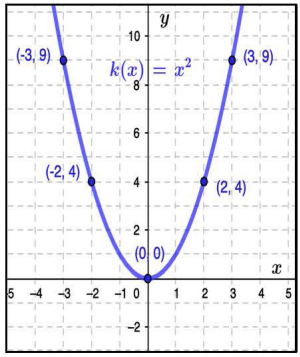
e)



d)



f)



2) Letra d.
3) Letra c.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 7.2

1)

a) $x = 1$.
b) $x = 1$ e $x = \frac{5}{2}$.
c) $\nexists x \in R$.
d) $x = 2$ e $x = 11$.
e) $x = -12$ e $x = 0$.
f) $x = -4$ e $x = 4$.

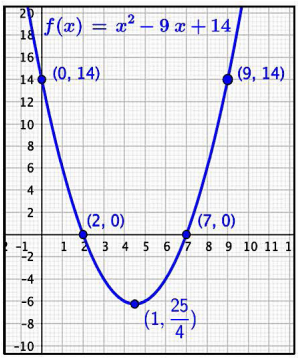
---

2) Perímetro: 38m.
3) No máximo: 1m.
4) 0 mg/kg ou 3mg/kg.
5) a) Empresa A. b) 1m ou 5m.
6) D(p) = 38.
7) Ponto A ≅ (1;27,1) e ponto B ≅ (119; 27,54).

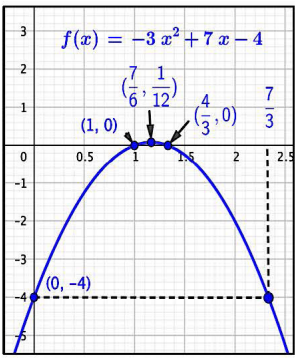
GABARITO DOS EXERCÍCIOS 7.3

1)

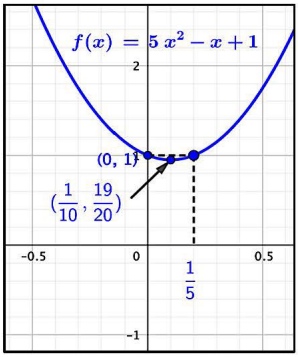
a)



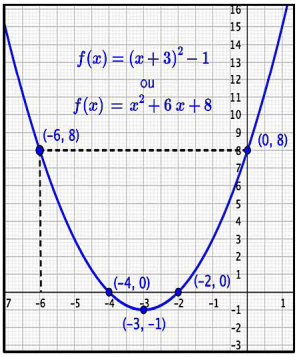
b)



c)



d)



2)

a) V (2,7)

b) V$(\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$

c) V(0,9)

d) V(-2,-13)

---

3)

a) F
b) F
c) V
d) V
e) V
f) F
g) V
h) V
i) V
j) V

---

4) Letra b.

---

5)

a) $f(x) = -x^2 + 2x - 1$

b) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

c) $f(x) = x^2 - 6x$

d) $(x) = -x^2 - 2x - 2$

---

6) 19,86 t/há e pH ≅ 7,29.

7) Letra b.

8) $f(x) = \frac{1}{20}x^2 + x$

9) 0,25m ou 25cm.

10) 50mx100m.

11) R$ 8,00.

12) Letra a.

13) 6,25m.

14) 9mx12mx$\frac{100}{108}$m.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 7.4

1)

x	1	2	3	4	5
y	0	0	2	6	12
$\frac{dy}{dx}$	-	0	2	4	6
$\frac{d^2y}{dx^2}$	-	-	2	2	2

2) Acréscimos iguais a x decorrem em acréscimos iguais a y (função afim), logo os pontos estão alinhados e a função de ajuste não pode ser uma função quadrática.

3)

a) $f(x) = \frac{9}{2}x^2 - 21x + 29$ *b)* $f(x) = 2^x + 1$

---

4) $f(x) = 4x^2 - 5x$

5) $f(x) = -5x^2 + 50x + 9$

6) $(8, -46)$

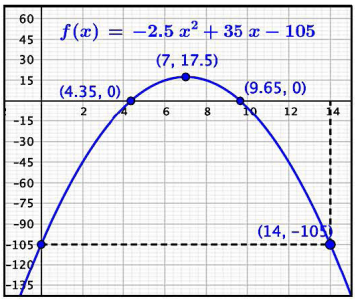
7)

a) $f(x) = \frac{-5}{2}x^2 + 35x - 105.$

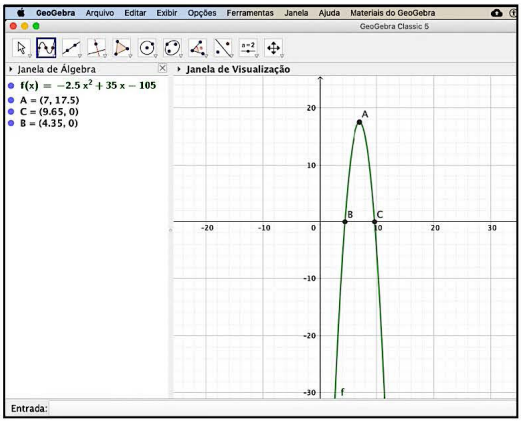
b) $MS = 17{,}5\ t.ha^{-1}.$

c) $pH' = 9{,}65\ e\ pH'' = 4{,}35.$

d)



e)



---

8)

a) $f(x) = \frac{-5}{2}x^2 + 35x - 105.$

b) $MS = 17{,}5\ t.ha^{-1}.$

c) $x = 3.$

d) $y = -20.$ Confirmado no geogebra.

---

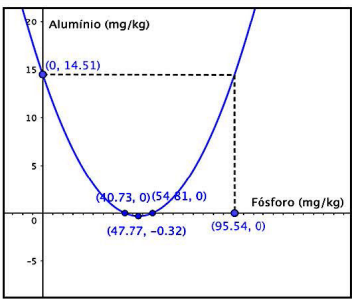
9)

a) $f(x) = 0{,}0065x^2 - 0{,}621x + 14{,}51.$

b) $17{,}41\ mg/kg.$

c) $(47{,}77; -0{,}32).$

d)



10)
a) $f(x) = -0{,}065x^2 + 12{,}55x - 522.$ *b)* $75{,}125g.$
c) $83{,}78g.$

---

11)
a) $f(x) = -7{,}42x^2 + 454x + 586.$ *b)* $30{,}59\ kg.ha^{-1}.$

---

12)
a) $f(x) = -0{,}0008x^2 + 0{,}1x + 0{,}8.$ *b)* $DAT \cong 60\ dias.$

---

13) Letra d.

14) Letra c.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 7.5

1) $f(x) = 0{,}2143x^2 + 1{,}61431x - 1.$

2) $f(x) = 0{,}1786x^2 + 0{,}7571x + 0{,}6.$

3)
a) $f(x) = 0{,}003x^2 + 0{,}5x + 232.$
b) $R^2=1$ ⇒ Significa que os dados se ajustam perfeitamente à função.
c) Confirmado.

4) $f(x) = 0{,}0022x^2 + 0{,}3213x + 2{,}3494.$

5)
a) $f(x) = 0{,}0003x^2 - 0{,}0457x + 1{,}8614$
b) $R^2=0{,}9986.$
c) Confirmado.

6) Letra e.

7) Letra d.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 8.1

1)
a) 512.
b) 81.
c) 1/16.
d) 1.
e) 8.
f)49/9.
g) 1.
h) 0.
i)1.
j)-1.
k) -1.
l)1/27.
m)1/1024.
n) 1/2.
o) 1.
p) 8.
q) 3.

---

2)
a) -5.
b) 0.
c) 1.
d) 2.
e) 5/3.
f) 17.
g) 4.
h) 5.

---

3)
a) x^5.
b) x^4.
c) x.
d) x^{-1}
e) x^4
f) 3^{2n}

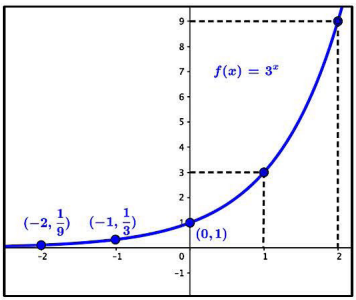
---

4) Letra e.

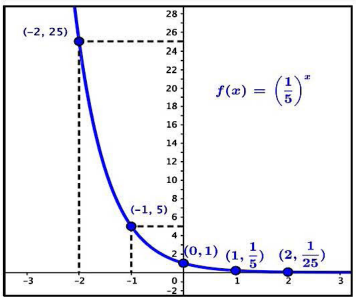
GABARITO DOS EXERCÍCIOS 8.2

1)

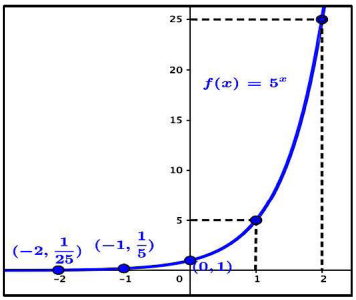
a)



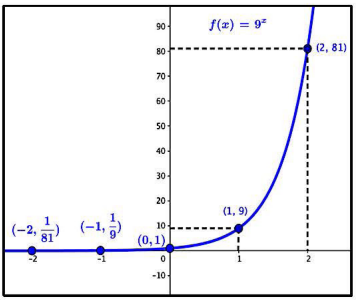
b)



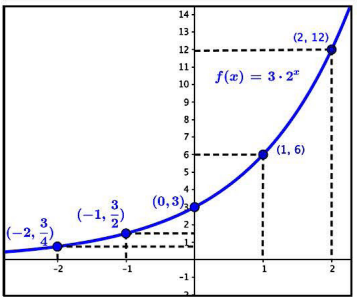
c)



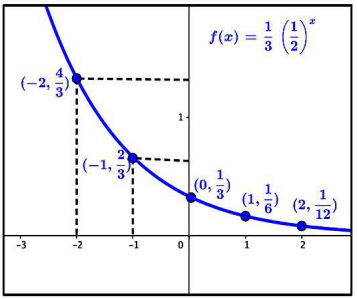
d)



e)



f)



2) Letra c.

3) Letra a.

4) Letra e.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 8.3

1)

a) S={5}.
b) S={7/3}.
c) S={-1}.
d) S={1/2}.
e) S={1/4}.
f) S={-5/2}.
g) S={4/3}.
h) S={-7, 0}.
i) S={2}.
j) S={1}.
k) S={1, 2}.
l) S={2, 3}.

---

2) Letra a.
3) Letra c.
4) Letra e.
5) Letra d.
6) a) $f(x) = 114.(0{,}98)^x$
b) 38,71 kg/planta.
7) Letra e.
8)Letra c.
9) $f(x) = 0{,}053.(253{,}6)^x$ *e* $f_0 = 0{,}053$
10)$f(x) = 0{,}018.(1{,}13)^x$

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 8.4

1) $(162, 18, 2, \frac{2}{9}, \frac{2}{81})$

2)
a) $f(x) = 30.(0{,}2)^x$
b) $f(x) = 4.(5)^x$

3) 125.
4) $f(x) = 100.(0{,}4)^x$
5)
a) $f(x) = 7{,}2.(2{,}1)^{\frac{x-1970}{10}}$
b) 140 e 294 milhões de toneladas, respectivamente.

6)
a) 45,5 milhões de toneladas.
b) 421,2 milhões de toneladas.

7)
a) R$ 16.384,00.
b) Entre 10 e 11 anos.

8)
a) 7,32 mil toneladas.
b) Entre 7 e 8 anos.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 9.1

1)
a) 4.
b) $\frac{5}{3}$
c) -5.
d) -2.
e) -4.
f) -4.
g) $\frac{-6}{5}$
h) $\frac{-9}{8}$
i) 1.
j) $\frac{4}{3}$
k) $\frac{1}{2}$

2)
a) $x = 729$.
b) $x = 3$.
c) $x = 3$.
d) $x = 4$.

3) Letra b.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 9.2

1)
a) $a + b + 1$.
b) $a + b + c$.
c) $c - a + 1$.
d) $(b + c - a + 1)/4$

2)
a) 11.
b) $\frac{-62}{15}$

3)
a) $x \cong 2{,}3142$.
b) $x \cong 1{,}39$.
c) $x \cong 0{,}85$.
d) $x \cong 1{,}29$.

4) Letra e.
5) Letra a.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 9.3

1)
a) ≅1,67. b)≅0,53. c)≅1,52.

2) 2.
3) $\frac{1}{3}$
4) $\frac{1-b}{2(a+b)}$
5) Letra e.
6) Letra c.
7) Letra c.
8) Letra e.

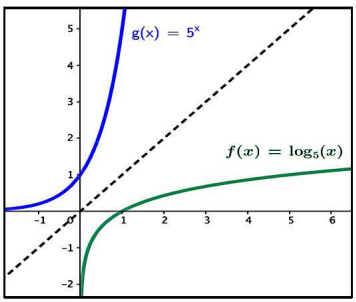
GABARITO DOS EXERCÍCIOS 9.4

1)
a) $S = \{7\}$.
b) $S = \{7\}$
c) $S = \{0,4\}$
d) $S = \{-2,1\}$
e) $S = \{4\}$
f) $S = \emptyset$.
g) $S = \{2\}$.
h) $S = \emptyset$.

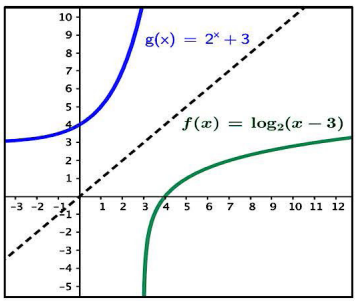
2) Letra c.
3) Letra b.
4) Letra e.
5) Letra a.
6) 3 anos.
7) a) 1 metro. b) 7,84 meses.
8) a) 2 milhões de toneladas. b) 2,2 milhões de toneladas. c) 900 meses.
9) a) D = {t ∈ ℕ|t > 3}. b) Não. c) 7 metros. d) 84 meses (7 anos).
10) Letra d.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 9.5

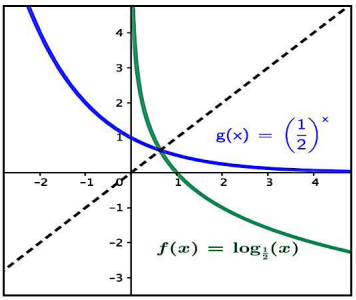
1)
a)



c)



b)



2) $n = 9$.
3) Letra b.

4) Letra c.
5) Letra c.
6) Pontos D e E.
7) a)Altura: 1m e diâmetro:0,1m (10 cm).
b) diâmetro: 20 cm.
8) Letra e.
9) Letra c.
10) Letra d.
11) Letra e

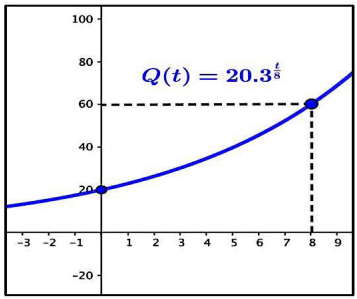
GABARITO DOS EXERCÍCIOS 9.6

1)
a) $e^{\frac{-1}{ln10}}$
b) e
c) $ln4$
d) $\frac{1}{5}$
e) $a^2.b^2$
f) 0

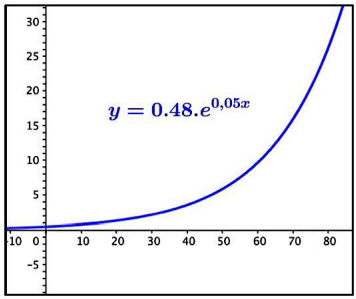
2)
a) $x = e^3$
b) $x = 1$
c) $x = -log_{e/5}\,30$
d) $x = 1 - ln2$
e) $x = 0$
f) $x = ln2$ e $x = ln3$

3)
a) $log\,y = x.log\,5$
b) $log\,y = log\,4 + x.log\,0{,}5$
c) $log\,y = log\,10 + x.log(1/3)$

4) a) 22,5ºC b) $t \cong 14{,}3$min.
5) $x = ln4$
6) a) $x = ln3/8$.
b) 540 plantas.
c)

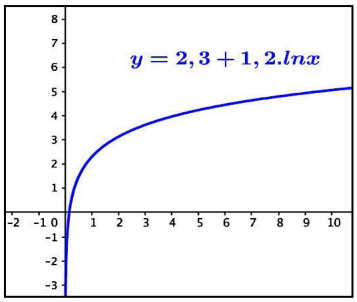


7) a) 3. b) $t \cong 1{,}32$.
8) a) P(60) $\cong 38{,}71$. b) $x \cong 7{,}28$.
9) a) Q(10)= 6. . b) $t \cong 10{,}5$. c) Q(t)=14.
10) a) 94. b) $t \cong 12{,}72$.
11) a) $k = 0{,}02$. b) $14{,}62\ cm$. c) $20\ cm$.
12) a) $y = 0{,}48.e^{0{,}05x}$ b) $y \cong 193{,}64cm$. c)
d) $lny = ln(0{,}48) + 0{,}05x$.



13) a) $y = 2{,}3 + 1{,}2.\,lnx$

b)



14) $y = 50 + 14.\,lnx$

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 9.7

1) $y = 1{,}9.\,e^{0{,}1x}$
2) $y = -3{,}78 + 9{,}65.\,lnx$
3) $y = -25 + 12.\,lnx$
4) *Função quadrática:* $y = -0{,}0125x^2 + 2{,}0164x + 15{,}296$ *com* R^2=99,72%.
5) *Função logarítmica:* $y = -11{,}352 + 15{,}954.\,lnx$ *com* R^2=97,60%.
6) *Função quadrática:* $y = -7x^2 + 273x + 1625$ *com* R^2=99,66%.

SOBRE O AUTOR

Francielck Domingos Freire: Mestre em Matemática pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM-UNIFAP-PROFMAT), graduado em licenciatura plena em Matemática e Física pela Universidade Federal do Amapá (Unifap) e professor do Instituto federal do Amapá.

SOBRE A OBRA

Matemática Aplicada às Ciências Agrárias é uma coleção com quatro livros (didáticos) voltados para os cursos de ciências agrárias.

Os volumes 1, 2 e 3 são destinados ao nível médio técnico da área de ciências agrárias, como agroecologia, agropecuária e agronegócio, e também para os componentes de conhecimentos matemáticos básicos de nível superior, ministrados em engenharia agronômica e engenharia agrícola.

O volume 4 foi elaborado para os componentes de Matemática de nível superior em qualquer área, porém aplicações em engenharia agronômica e engenharia agrícola.

Em todos os volumes, os conteúdos são abordados com Matemática pura, exatamente como se ensina no ensino médio e no nível superior, porém acompanhados de contextualização, modelagem, uso de tecnologias e aplicação às ciências agrárias.

Todos os exercícios possuem questões elaboradas pelo autor visando uma melhor assimilação do conteúdo, além de questões selecionadas criteriosamente do ENEM, ENADE, vestibulares e outras instituições.

É uma coleção de livros (didáticos) elaborada com intuito de assessorar professores e profissionais da área, e de dar um embasamento teórico mais contundente aos alunos e acadêmicos de cursos afins.


COMUNICADO
IMPORTANTE
Visite nossas
outras obras
de Ensino,
Pesquisa e
Extensão
EDIFAP



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO AMAPÁ - IFAP

Rodovia BR 210 KM 3, s/n - Bairro Brasil Novo

CEP: 68.909-398

Email: reitoria@ifap.edu.br

Telefone: (96) 3198-2150

Site: https://ifap.edu.br/

Twitter: @ifap_oficial

Facebook: /institutofederaldoamapa

ISBN: 978-65-89513-28-5



EDIFAP